Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Sommersemester 2012

Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übungsblatt III

Martin Flechl, Anna Kopp, Stan Lai

18.5. 2011

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 13 *Diffusion ohne elektromagnetisches Feld*

Betrachten Sie die Bewegung eines Elektrons in einem Gas ohne äußere Felder.

(i) Ein Elektron mit Geschwindigkeit v legt zwischen zwei Stößen den Weg $\delta_{\text{vol}} = vt$ zurück, bevor es zur Zeit t, verteilt um die mittlere Stoßzeit τ, zur nächsten Wechselwirkung kommt. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Stößen ist verteilt gemäß $P(t) = \frac{1}{\tau} \exp -\frac{t}{\tau}$. Berechnen Sie den mittleren quadratischen Abstand vom Ursprungsort für einen Stoß, in dem Sie über alle möglichen Stoßzeiten mitteln: $<\delta_{\text{vol}}^2> = \int_0^\infty \delta_{\text{vol}}^2(t) P(t) dt$. Nutzen Sie die Beziehung $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$.

(ii) Zu wievielen Stößen kommt es im Mittel in der Zeit T? Multiplizieren Sie den gerade erhaltenen Ausdruck mit diesem Faktor k, um die mittlere quadratische Abweichung für die Zeit T zu erhalten, $\sigma_{\text{vol}}^2 = k\cdot <\delta_{\text{vol}}^2>$.

(iii) In der Vorlesung wurde die Diffusionskonstante implizit durch die Gleichung $\sigma_{\text{x}}^2 = \sigma_{\text{y}}^2 = \sigma_{\text{z}}^2 = 2DT$ definiert. Was folgt daraus für den dreidimensionalen Fall, also für den Zusammenhang zwischen σ_{vol}^2 und D?

(iv) Nutzen Sie diesen Zusammenhang und die abgeleitete Beziehung aus (ii) um zu zeigen, dass der entsprechende Ausdruck für die Diffusionskonstante $D = \frac{v^2\tau}{3} = \frac{v\lambda}{3}$ lautet (λ ist die mittlere freie Weglänge).

Beachten Sie, dass die Diffusionskonstante im allgemeinen Fall gleich $D = \frac{<v\lambda>}{3}$ ist, also erst nach Mittelung über $v\lambda(v)$ folgt.

Aufgabe 14 *Energieverlust von minimal ionisierenden Teilchen*

Geladene Teilchen im relativistischen Bereich (außer Elektronen) von $\beta\gamma \simeq 4$ deponieren ihre Energie in Materie fast ausschließlich durch Ionisation und Anregungung von Atomen. In Argon ist eine mittlere Energie von 26 eV nötig, um ein Elektron-Ion-Paar zu erzeugen; in einem Siliziumdetektor hingegen ist im Mittel eine Energie von 3.6 eV nötig.

(i) Wie dick müssen die Detektoren sein, sodass ein minimal ionisierendes Teilchen im Mittel 1 MeV deponiert?

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Elektron-Ion-Paare in Argon und der Elektron-Loch-Paar in Silizium, die in diesem Fall (=wenn 1 MeV deponiert wird) erzeugt werden.

(iii) Was ist die relative Energieauflösung $\Delta E/E$ der zwei Detektoren für diese Energie unter der Annahme, dass die Detektoreffizienzen 100% sind und die Anzahl der produzierten Elektron-Ion- bzw. Elektron-Loch-Paare einer Poissonverteilung folgt?

Gegeben seien:

- $< dE/d(\rho x) > \simeq 1.5$ MeV/(g cm^2) für ein minimal ionisierendes Teilchen.
- Die Dichte Argons $\rho^{Ar} = 1.78$ g/cm^3.
- Die Dichte Siliziums $\rho^{Si} = 2.40$ g/cm^3.

Hausaufgaben

Aufgabe 15 *Diffusion im elektromagnetischen Feld,* $\mathbf{E}||\mathbf{B}$ **8 Punkte**

Analog zur Anwesenheitsaufgabe: Betrachten Sie nun die Bewegung eines Elektrons in einem Gas mit Magnetfeld $\mathbf{B}$. In Detektoren kann der Driftweg der Elektronen mehr als 1 m betragen. Trotzdem erhält man eine sehr gute Ortsauflösung, da die Diffusion in der Ebene senkrecht zur Driftrichtung eingeschränkt ist – die Elektronen werden auf Spiralbahnen um die Magnetfeld-Richtung gezwungen. Die Zeit für einen Umlauf ist dabei durch das Inverse der Zyklotronfrequenz $\omega = \frac{eB}{m}$ gegeben. Betrachten Sie dazu Abbildung 1 und rechnen Sie in der (zweidimensionalen) transversalen Ebene.

(i) Drücken Sie zunächst $\sin\varphi/2$ als Funktion von δ und ρ aus, und φ durch ω und die Zeit t. Damit erhalten Sie δ_T als Funktion von t und mit Parametern ρ und ω.

(ii) Lösen Sie das Integral $< \delta_{\mathrm{T}}^2 >= \int_0^\infty \delta_{\mathrm{T}}^2(t)P(t)dt$ für einen Stoß analog zur Anwesenheitsaufgabe. Nützen Sie dabei $\int_0^\infty \sin^2(ax)e^{-x}dx = 2a^2\frac{1}{1+4a^2}$.

(iii) Multiplizieren Sie den Ausdruck wieder mit der mittleren zu erwartenden Anzahl von Stößen, um σ_{T}^2 zu erhalten. Drücken Sie außerdem ρ durch die Transversalgeschwindigkeit v_T aus: Vereinfachen Sie dazu die Bewegungsgleichung $ev_TB = mv_T^2/\rho$ (Lorentzkraft = Zentripetalkraft) und verwenden Sie $\omega = \frac{eB}{m}$.

(iv) Zeigen Sie, dass der entsprechende Ausdruck für die Diffusionskonstante $D_T = \frac{1}{2}\frac{v_T^2\tau}{1+\omega^2\tau^2}$ lautet. Hinweis: Für 2 Dimensionen gilt $\sigma_{\mathrm{T}}^2 = 4D_TT$.

(v) Es gilt $v_T^2 = \frac{2}{3}v^2$. Wie lautet das Verhältnis der Diffusionskonstanten D und D_T im Fall mit und ohne Magnetfeld für $B = 1.5$ T und $\tau = 10^{-11}$ s?

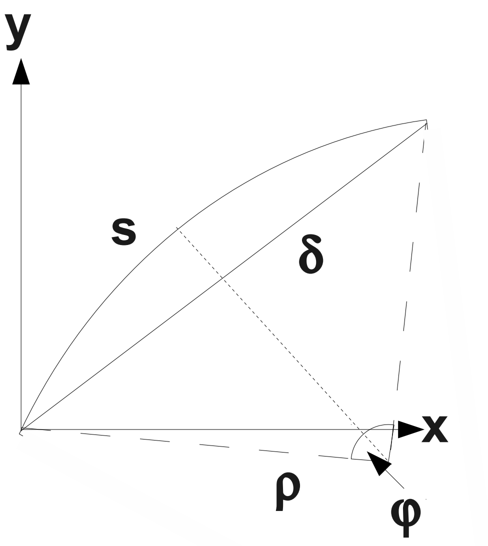

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe "Diffusion im Magnetfeld". Gezeigt ist die transversale Ebene, also jene Ebene, die normal zur Magnetfeldrichtung steht. Hier ist s der zurückgelegte Weg des Teilchens (auf seiner Spiralbahn. Die Spirale entspricht in der transversalen Projektion einem Kreis), δ der Abstand vom Ursprungsort (in der transversalen Ebene), ρ der Radius der Kreisbahn in der transversalen Ebene und φ der Winkel, der die Position auf der Kreisbahn beschreibt.

Aufgabe 16 *Totzeit* **6 Punkte**

Betrachten Sie zunächst den Fall einer nicht-verlängerbaren Totzeit, d.h., der Detektor ist nach einer Signaldetektion für eine Zeit τ_D insensitiv (=kann kein weiteres Signal registrieren), ein weiteres Signalereignis während der Totzeit verlängert die Totzeit aber nicht. Sei N_w die wahre Signalrate, k die Anzahl an registrierten Signalereignissen während der Zeit T, und $N_\mathrm{m} = k/T$ die gemessene Zählrate.

(i) Die wahre Anzahl an Signalereignissen $N_\mathrm{w} \cdot T$ setzt sich aus registrierten Signalereignissen und der erwarteten Anzahl an Ereignissen während der Totzeit zusammen. Schreiben Sie beide Terme (als Funktion von k, N_w und τ_D) an.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, dass gilt $N_\mathrm{w} = \frac{k/T}{1-(k/T)\tau_D}$. Die gemessene Zählrate muss also durch den Faktor $\frac{1}{1-(k/T)\tau_D}$ korrigiert werden, um die wahre Zählrate zu erhalten.

(iii) Sie beobachten in einer Minute 600 Signalereignisse, und wissen, das die Totzeit 0.01 s beträgt. Wie groß ist die wahre Signalrate?

Betrachten Sie nun den Fall einer verlängerbaren Totzeit: Wenn während der Totzeit ein weiteres Signalereignis eintrifft, so verlängert sich die Totzeit um τ_D ab dem Eintreffzeitpunkt.
Wie bekannt, wird die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ dafür, dass die Zeit t zwischen zwei Ereignissen vergeht, durch die Funktion $P(t) = N_\mathrm{w} \cdot e^{-N_\mathrm{w} t}$ beschrieben.

(iv) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(t > \tau_D)$, also dafür, dass der Abstand zwischen zwei Ereignissen größer als die Totzeit ist? Sie müssen dafür die Funktion $P(t)$ geeignet integrieren.

(v) Die Beziehung zwischen beobachteter und wahrer Anzahl an Signalereignissen ist daher gegeben durch $k = N_\mathrm{w} T e^{-N_\mathrm{w}\tau_D}$. Begründen Sie dies.

Um bei gemessenem k den Wert N_w zu ermitteln, muss diese Gleichung numerisch gelöst werden.

Aufgabe 17 *Standardabweichung der Gleichverteilung* **6 Punkte**

Die Variable X sei gleichverteilt im Intervall $[a,b]$.

(i) Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x) an – also jene Funktion, die für jeden Wert x die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Variable X diesen Wert x annimmt.

(ii) Wie lautet der Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x \cdot f(x)$?

(iii) Wie lautet die Varianz $\mathrm{Var}(X)$=$\mathrm{E}(X^2)$-$(\mathrm{E}(X))^2$?

(iv) Sei a=0 und b=1. Wie groß ist die Standardabweichung?