Albert-Ludwigs-Universität Freiburg | Sommersemester 2012

Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übungsblatt X

Martin Flechl, Anna Kopp, Stan Lai

13. Juli 2012

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 47 *Dopingtest*

Gegeben sei ein Dopingtest für Sportler. Der Test hat eine Sensitivität (Wahrscheinlichkeit für ein positives Resultat, gegeben dass der Sportler gedopt hat) von 99% und eine Spezifität (Wahrscheinlichkeit für ein positives Resultat, gegeben, dass der Sportler nicht gedopt hat) von 1%.

(a) Nehmen Sie an, dass 1% der Sportler in einem Wettkampf leistungssteigernde Medikamente benutzen. Berechnen Sie mit Hilfe des Bayes-Theorems, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler gedopt ist, gegeben, dass der Test postiv ist.

(b) Nehmen Sie nun dass 10% aller Sportler in einem Wettkampf leistungssteigernde Medikamente benutzen. Berechnen Sie die neue Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler gedopt hat, gegeben ein positives Resultat.

(c) Nehmen Sie an, dass neben der A-Probe ein weiterer Test, die B-Probe, gemacht wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler gedopt hat, wenn beide Tests positive Ergebnisse liefern? Verwenden sie die Werte für Sensitivität und Spezifität aus der Einleitung und (a).

Aufgabe 48 *Binomialverteilung in der Praxis*

Nehmen Sie an, ein Programmierer macht in 99,5% seiner erstellten Programmzeilen keinen Fehler.

(a) Wie viele Programmzeilen muss er schreiben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einen Fehler zu machen?

(b) Wie viele Programmzeilen muss er schreiben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindesten zwei Fehler zu machen?

Hausaufgaben

Aufgabe 49 *Rekursive Mittelwert- und Varianzberechnung* **5 Punkte**

Gegeben sei eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\overline{x}_n$ der Mittelwert der ersten n Elemente ist, dann gilt:

$$\overline{x}_n = \overline{x}_{n-1} + \frac{x_n - \overline{x}_{n-1}}{n}$$

(b) Wenn σ_n^2 die Varianz der ersten n Elemente ist, dann gilt:

$$\sigma_n^2 = \frac{(n-1)\sigma_{n-1}^2 + (x_n - \overline{x}_n)(x_n - \overline{x}_{n-1})}{n}$$

Diese recursive Berechnung vermeidet numerische Instabilitäten bei sehr großen Stichproben.

Aufgabe 50 *Wechseln oder nicht?* **5 Punkte**

In einer Spielshow gibt es drei Türen. Hinter einer Tür wartet ein Gewinn, hinter den beiden anderen Türen befinden sich Nieten. Nachdem der Kandidat eine Tür ausgewählt hat, öffnet der Moderator eine Tür mit einer Niete (aber nicht die Tür, die der Kandidat gewählt hat). Der Kandidat darf erneut eine der beiden übrigen Türen wählen.

Sollte er bei der ursprünglichen Tür bleiben oder besser die andere Tür wählen, um seine Gewinnchance zu erhöhen? Benutzen Sie explizit das Bayes-Theorem, um Ihre Antwort zu begründen.

Aufgabe 51 *Variablentransformation* **3 Punkte**

Betrachtet seien zwei Zufallsvariablen x_1 und x_2 mit zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$. Die beiden Zufallsvariablen seien unabhängig, das heisst für die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung gilt:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

Zeigen Sie: Falls x_1 und x_2 in zwei neue Zufallsvariablen y_1 und y_2 transformiert werden, so dass $y_1 = y_1(x_1)$ und $y_2 = y_2(x_2)$ gilt, so sind auch die beiden neuen Zufallsvariablen unabhängig voneinander.

Aufgabe 52 *Fehlerfortpflanzung* **2 Punkte**

Gegeben sei ein Winkel $\theta = 0,56 \pm 0,01$. Wie groß sind die Fehler auf $\sin\theta$, $\cos\theta$ und $\tan\theta$? Wie groß sind sie für den Fall $\theta = 1,56 \pm 0,01$?

Aufgabe 53 *Spurvariablen* **5 Punkte**

Spurdetektoren machen Ortsmessungen in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z). Normalerweise ist der Fehler auf die Ortsmessung in r sehr klein (σ_r), und ϕ und z werden mit unkorrelierten Fehlern σ_ϕ und σ_z gemessen. Erinnern Sie sich an die Beziehung zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad z = z.$$

Die Kovarianzmatrix in Zylinderkoordinaten ist dann gegeben durch:

$$V_{r,\phi,z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Jakobi-Matrix der Ableitung lautet:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Kovarianzmatrix in kartesischen Koordinaten (x, y, z) lautet:

$$V_{x,y,z} = AV_{r,\phi,z}A^T = \begin{pmatrix} \sigma_\phi^2 y^2 & -\sigma_\phi^2 xy & 0 \\ -\sigma_\phi^2 xy & \sigma_\phi^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen x und y.

(d) Erklären Sie in einfachen Worten, warum die Varianz von x abhängig ist von y. (und auch andersherum)