Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Sommersemester 2009

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung III

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

13.5.2009

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 16 *Transformationsmethode*

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach einer Potenzverteilung

$$f(x) = (n+1)x^n,\ 0 \leq x \leq 1,\ n > -1 \tag{1}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = r^{\frac{1}{n+1}}. \tag{2}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der log-Weibull-Verteilung

$$f(x) = \exp(-x - \exp(-x)) \tag{3}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = -\ln(-\ln r). \tag{4}$$

Aufgabe 17 *Integration der Planck-Verteilung*

Wir betrachten die Erzeugung von Photonen, die dem Gesetz von der Strahlung des Schwarzen Körpers folgen. Die Verteilung der skalierten Frequenz $x = h\nu/kT$ ist dann gegeben durch die Plancksche Strahlungsformel:

$$f(x) = c\frac{x^3}{e^x - 1} \tag{5}$$

Im folgenden soll besprochen werden, wie man diese Funktion möglichst effizeint zwischen $x = 0$ und x_{max} integrieren könnte, bzw. Zufallszahlen (oder MC-Photonen) gemäß dieser Verteilung erzeugen könnte.

(i) Warum lässt sich die Transformationsmethode nicht anwenden?

(ii) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion.

(iii) Ermitteln sie einen Ausdruck für die Lage des Maximums und dessen Höhe. Die erhaltenen Gleichungen sind nur numerisch zu lösen. Als Lage des Maximums ergibt sich $x \approx 2.82$ mit $f_{\max} \approx 1.42c$.

(iv) Besprechen Sie, wie man nach der "Hit and Miss"-Methode vorgehen würde, um die Funktion zu integrieren, bzw. Zufallszahlen zu generieren. Wie ist die Effizienz gegeben? Warum wird dieses Verfahren für hohe x sehr ineffizent?

(v) Nun wollen wir einen Ansatz mit einer stückweise definierten Majoranten machen. Im unteren Bereich bis zu einem Punkt x_1 machen wir den Ansatz $g_{\mathrm{I}}(x) = f_{\max}$, oberhalb von x_1 machen wir folgenden Ansatz:

a) Betrachten Sie zunächst das asymptotische Verhalten von $f(x)$ für große x. Welchen Einfluss hat der x^3-Term?

b) Warum könnte der Ansatz

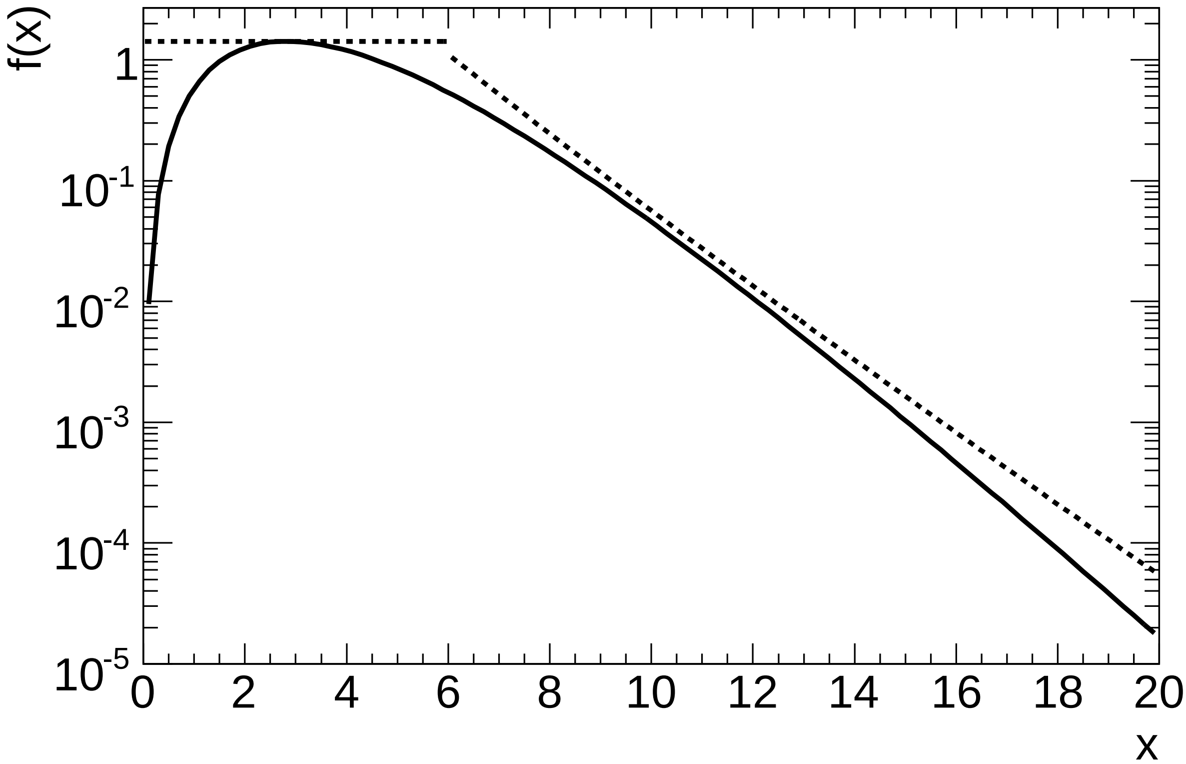
$$g_{\mathrm{II}}(x) = K \cdot c \cdot x^{-\epsilon} \exp(-x^{1-\epsilon}) \tag{6}$$

ein geeigneter Ansatz für eine Majorante sein?

c) Ermitteln Sie die Transformationsvorschrift, die zu dieser Majorante gehört.

d) Besprechen Sie nun noch das allgemeine Vorgehen für die Erzeugung von Zufallsvariablen bzw. zur Monte-Carlo-Integration. Wie wird entschieden, ob eine Zufallszahl $x < x_1$ oder $x > x_1$ genommen wird.

e) Wie groß ist der Effizienzgewinn im Vergleich zu "Hit and Miss" im Gebiet $x > x_1$ für $c = 1$, $K = 200$, $\epsilon = 0.1$, $x_{max} = 20$, $x_1 = 6$? Die folgende Abbildung zeigt die so erhaltene stückweise definierte Majorante.



Hausaufgaben

Aufgabe 18 *Transformationsmethode für die Dreiecksverteilung* **2 Punkte**

Berechnen Sie die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der Dreiecksverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x_{\text{max}}^2} & 0 < x < x_{\text{max}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

zu erzeugen.

Aufgabe 19 *Transformationsmethode für die Cauchy und die Breit-Wigner-Verteilung* **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = \tan\left[\pi(r - \frac{1}{2})\right]. \tag{9}$$

(ii) Betrachten Sie jetzt die Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma} \cdot \frac{\Gamma^2}{4 \cdot (x - x_0)^2 + \Gamma^2}. \tag{10}$$

Benutzen Sie das Ergebnis aus (i), um eine Transformation zu ermitteln, mit der sich Breit-Wigner-verteilte Zufallszahlen erzeugen lassen.

Aufgabe 20 *Transformationsmethode etwas trickreicher* **5 Punkte**

(i) In Aufgabe 8 wurde gezeigt, dass das Produkt $z = x_1x_2$ zweier gleichverteilter Zufallszahlen x_1x_2 im Intervall [0,1] verteilt ist gemäß $f(z) = -\ln z$ benutzen Sie dieses Ergebnis und die Transformationsvorschrift für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, um zu zeigen, dass man Zufallszahlen gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(x) = xe^{-x} \qquad 0 < x < \infty \tag{11}$$

erzeugen kann durch die Transformation:

$$x = -\ln(x_1x_2). \tag{12}$$

(ii) Zeigen Sie, dass man Zufallszahlen gemäß einer Gauss-Verteilung (zunächst mit $\sigma = 1$ und Mittelwert 0)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{13}$$

erzeugen kann aus zwei gleichverteilten Zufallszahlen r_1,r_2 im Intervall [0,1] erzeugen kann gemäß der Transformationsvorschrift

$$x = \sqrt{-\ln r_1^2}\cos(2\pi r_2) \tag{14}$$

Betrachten Sie dazu zunächst eine zweidimensionale Gaussverteilung $g(x,y) = f(x) \cdot f(y)$, wechseln in Polarkoordinaten r,ϕ, wenden die Transformationsmethode an und transformieren zurück.

(iii) Wie kann man aus einer gemäß (ii) erhaltenen zweidimensionalen Gaussverteilung, Gaussverteilungen mit beliebigen Breiten und Mittlwerten erhalten? Wie würde man eine korrelierte zweidimensionale Gaussverteilung erzeugen?

Aufgabe 21 *Additive Wahrscheinlichkeitsdichten* **5 Punkte**

Häufig ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus mehreren einzelnen Funktionen additiv zusammengesetzt. Im folgenden betrachten wir vereinfachend den Fall von nur zwei Summanden:

$$f(x) = \epsilon f_1(x) + (1 - \epsilon) f_2(x). \tag{15}$$

Dabei soll gelten:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx \\
S_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx \\
S_1 + S_2 = 1, &
\end{aligned}
$$

so dass insbesondere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt. Weiterhin sollen die Stammfunktionen zu f_1 und f_2 analytisch berechenbar und invertierbar sein.

(i) Überlegen Sie sich ein Verfahren, bei dem man nur eine gleichverteilte Zufallszahl r im Intervall [0,1] benötigt, um gemäß dieser additiven Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eine Zufallszahl zu erzeugen. Mit r muss also sowohl zwischen f_1 und f_2 entschieden werden, als auch gemäß der (eventuell leicht modifizierten) Transformationsmethode die Zufallszahl nach f_1 bzw. f_2 erzeugt werden.
Tipp: Beachten Sie, dass f_1 und f_2 nicht mehr auf 1 normiert sind! Es könnte nützlich sein, sich die Konsequenz daraus anhand der Methode, aus diskreten Zufallsvariablen bzw. Histogrammen Zufallszahlen zu erzeugen, zu veranschaulichen.
Zweiter Tipp: Sie können sich auch die Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ bzw. besser $1 - F_2(x)$ oder auch $F_2(x) + S_1$ skizzieren und sich die Transformationsmethode graphisch klar machen.

(ii) Wie könnte man das Problem mittels zweier Zufallszahlen lösen?

(iii) Betrachten Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Berecih $0 < x < a$, die sich aus den folgenden Komponenten zusammensetzt:
1. Einer Exponentialverteilung mit Parameter λ und Gesamtanteil ϵ.
2. Einer konstanten Untergrundverteilung.
Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf. Beschreiben Sie explizit das Vorgehen für die Erzeugung von Zufallszahlen nach dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und geben Sie die notwendigen Transformationsvorschriften an.

(iv) Wäre in diesem Beispiel der direkte Weg der Transformationsmethode über die Stammfunktion der Gesamtwahrscheinlichkeitsdichtefunktion möglich gewesen?

Aufgabe 22 *Erwartungstreuer Schätzer für σ^2* **4 Punkte**

Es werden n Messungen einer Zufallsvariablen x, die nach einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 verteilt ist, durchgeführt. Zeigen Sie, dass

$$
s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{16}
$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist. Wie groß ist die Abweichung, wenn man $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ als Schätzer benutzen würde?
Tipp: $x_i - \bar{x} = x_i - \mu + \mu - \bar{x}$!