Kern- und Teilchenphysik
Übung I

Prof. Markus Schumacher, Dr. Henrik Nilsen

27. - 30.4.2010

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 *Natürliche Einheiten*

(i) Bestimmen Sie die potentielle Energie einer Tafel Schokolade (M= 100 g), die sich einen Meter über dem Boden befindet, in Einheiten von eV.

(ii) Bestimmen Sie den Wert der Newtonschen Gravitationskonstanten $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ in den natürliche Einheiten der Teilchenphysik.

Aufgabe 2 *Elastische Streuung an einer harten Kugel*

Wir betrachten die elastische Streuung einer kleinen, harten Kugel (*Projektil* mit Radius r) an einer großen, harten Kugel (Radius R), siehe Abb. 1. Es gilt $r \ll R$. Das Raumwinkelelement $d\Omega$ ist gegeben als $\sin\theta d\theta d\phi$, wo θ (ϕ) der Polarwinkel (Azimutwinkel) ist.

(i) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für einen gegebenen (Polaren) Streuwinkel θ, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$ (siehe Abb. 2). Hinweis: Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und θ. Verwenden Sie die in der Vorlesung gegebene Relation

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta} \mid \frac{d\mathrm{b}}{d\theta} \mid \tag{1}$$

um $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$ zu berechnen.

(ii) Was ist der totale Wirkungsquerschnitt integriert über alle Streurichtungen?

Kommentar zu den Antworten: Jede Streurichtung ist gleich wahrscheinlich. Der totale Wirkungsquerschnitt entspricht der Projektionsfläche der Kugel auf die Ebene tranversal zur Flugrichtung des Projektils.

Aufgabe 3 *Relativistischer Zweikörperzerfall im Ruhe*

Betrachten Sie den Zerfall eines ruhenden Teilchen A in zwei Teilchen B und C.

(i) Zeigen Sie, dass für die Energien der auslaufenden Teilchen in Abhängigkeit der verschiedenen Massen gilt:

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}, \qquad E_C = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_C^2}{2m_A}. \tag{2}$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Impuls der Endzustandsteilchen $\mid \vec{p}_f \mid = \mid \vec{p}_B \mid = \mid \vec{p}_C \mid$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\mid \vec{p}_f \mid = \frac{1}{2m_A}\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2m_B^2 - 2m_A^2m_C^2 - 2m_B^2m_C^2}. \tag{3}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 4 *Relativistische Kinematik* **4 Punkte**

Am europäischen Forschungszentrum für Elementarteilchenphysik CERN in Genf wurde der Proton-Proton-Collider Large Hadron Collider (LHC) voriges Jahr in betrieb genommen. Im LHC Speicherring zirkulieren zwei gegenläufige Protonenstrahlen mit einer Energie von zunächst 3. 5 TeV und werden an verschiedenen Wechselwirkungspunkten zur Kollision gebracht.

(i) Bei der Reaktion $A+B = C+D$ ist die Energie, die zur Produktion der Teilchen C zur Verfügung steht, durch die *Schwerpunktsenergie* $\sqrt{s}$, mit $s = (p_A + p_B)^2$ gegeben, wo p_A und p_B die Vierervektoren der Teilchen A und B sind. Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie am LHC.

(ii) Es ist vorhergesehen, dass 1404 Pakete mit jeweils 1.15×10^{11} Protonen in jeder Richtung durch den LHC geschickt werden. Wie schnell muss ein Porsche 911 (Masse 1.4 Tonnen) fahren, um die gleiche kinetische Energie zu haben wie die am LHC beschleunigten Protonen?

(iii) Es wurde in der Vorlesung erwähnt, dass die erreichbare Schwerpunktsenergie in Kollisionen zwischen zwei Teilchenstrahlen deutlich großer ist als in Kollisionen zwischen einem Teilchenstrahl und einem feststehendem Target. Welche Energie müsste ein Protonstrahl haben, um bei der Kollision mit ruhenden Protonen die gleiche Schwerpunktsenergie wie am LHC zu erreichen? (Die Ruhemasse der Protonen in natürliche Einheiten ist 0. 938 GeV.)

Aufgabe 5 *Kosmische Höhenstrahlung* **6 Punkte**

Auf die Erdatmosphäre treffen Teilchen aus den Weltall, hauptsächlich Protonen. Bei der Wechselwirkung mit den Kernen der Gasmolekyle der Atmosphäre entstehen geladene Pionen, die anschließend in Myonen zerfallen ($\pi^\pm \to \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$). Die mittlere Lebensdauer der Myonen im Ruhesystem ist 2.2×10^{-6} s, und die Ruhemasse eines Myons ist 105. 7 MeV. Wir nehmen an, dass ein Myon in einer Höhe von 10 km entsteht mit einem Impuls von $|\vec{p}| = 1$ GeV.

(i) Berechnen Sie die Gesamtenergie und den γ-Faktor des Myons. Wie groß ist die Geschwindigkeit (β) des Myons in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit?

(ii) Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer und die mittlere Flugstrecke des Myons aus Sicht eines Beobachters auf der Erde.

(iii) Myonen zerfallen nach einem exponentiellen Zerfallsgesetz. Die Zahl, der nach der Zeit t nicht zerfallenen Myonen, ist gegeben durch $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$ mit N_0 als Zahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen Myonen. Wie lange muss das Myon dieser Aufgabe überleben, damit es die Erdoberfläche erreicht? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das dieses passiert?

Aufgabe 6 *Klassische Herleitung der Rutherfordschen Streuformel* **10 Punkte**

Rutherford Streuung ist die elastische, elektromagnetische Streuung eines leichten, punktförmigen Projektils mit Ladung z und Masse m (e.g. α-Teilchen) an einem massiven Target mit Ladung Z und Masse M (z.B. Goldatomkern). Es wird angenommen, dass $m \ll M$, so dass die Rückstoßenergie des Kerns vernachlässigbar ist. Dies gilt nicht für freie Atome, aber für Atome, die in Gitter-Struktur gebunden sind, z.B. in einer Goldfolie. Der Streuprozess ist abgebildet in Abb. 3. Die Zeit t ist 0, wenn der Abstand zwischen Projektil und Target minimal ist, negativ davor und positiv danach. Der Streuwinkel sei θ.

(i) Der Drehimpuls des Projektils um den Atomkern ist eine erhaltene Größe, gegeben als

$$|\vec{L}| = |\vec{L}(t)| = |\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)| \,, \tag{4}$$

wo $\vec{r}(t)$ ($\vec{v}(t)$) der Positionsvektor (Geschwindigkeitsvektor) des Projektils zum Zeitpunkt t ist. Berechnen Sie den Drehimpuls des Projektils bezüglich des Atomkerns für $t \to -\infty$. Drücken Sie den Drehimpuls für eine beliebige Zeit t durch die Winkelgeschwindigkeit $d\phi/dt$ aus, wo ϕ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ ist (siehe Abb. 3). Zeigen Sie, dass sich durch Ausnutzung der Drehimpulserhaltung folgender Zusammenhang ergibt:

$$dt = \frac{r^2}{vb} d\phi. \tag{5}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Impulsänderung (Δp_n) entlang der Symmetrieachse $\vec{n}$ von $t = -\infty$ auf $t = \infty$ als

$$\Delta p_n = 2mv \sin\frac{\theta}{2} \tag{6}$$

ausgedrückt werden kann.

(iii) Verwenden Sie der Coulombsche Gesetz, um zu zeigen, dass

$$\Delta p_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zZe^2}{4\pi r^2} \cos\phi(t) dt. \tag{7}$$

(iv) Zeigen Sie mittels Gleichungen (5), (6) und (7) dass

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi m v^2}\frac{1}{b}. \tag{8}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt wie man mittels der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung (1), Gleichung (8) und trigonometrischen Identitäten auf die Rutherfordsche Streuformel kommt.

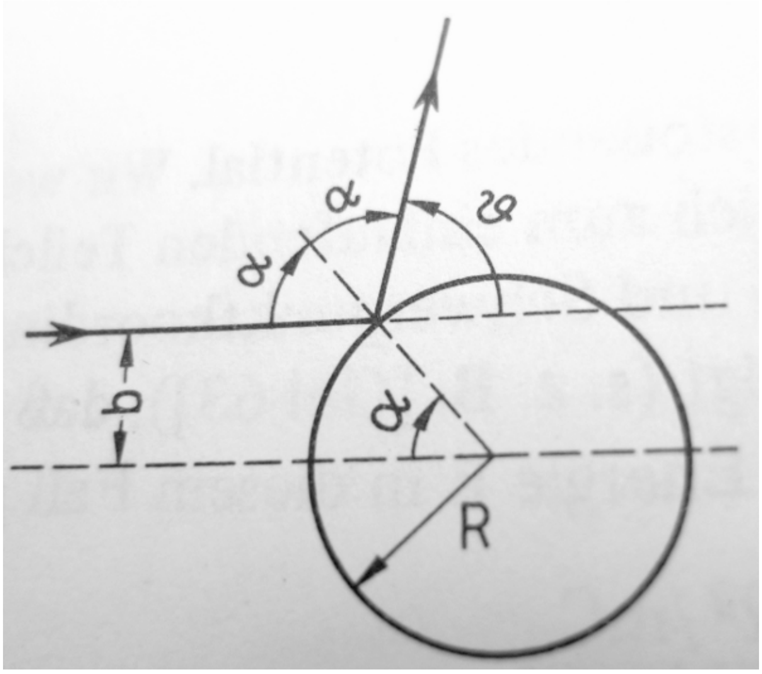

Abbildung 1: Elastische Streuung an einer harten Kugel. Der (Polare) Streuwinkel, im Aufgabetext θ, wurde in der Abbildung ϑ genannt.

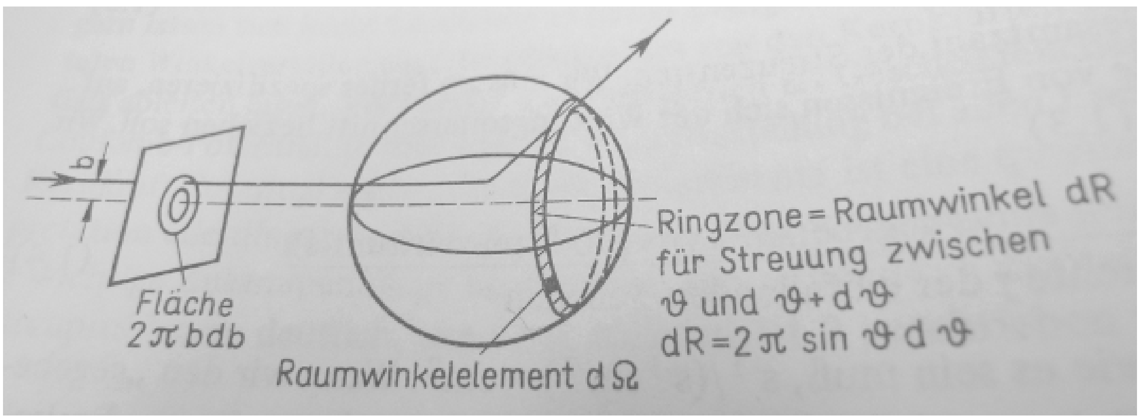

Abbildung 2: Illustration der in der Vorlesung gegebene Gleichung (1). Der (Polare) Streuwinkel, im Aufgabetext θ, wurde in der Abbildung ϑ genannt.

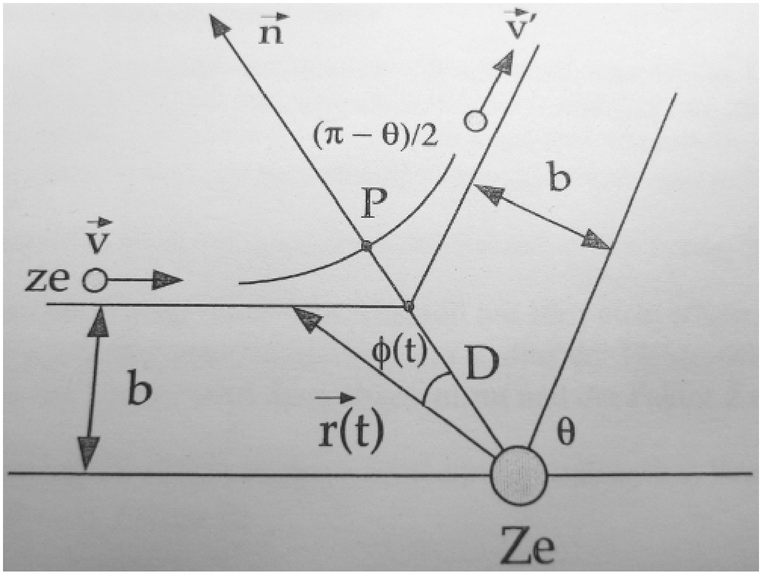

Abbildung 3: Rutherford Streuung eines Teilchens (Projektil) mit Ladung ze an einen Atomkern mit Ladung Ze. Der Positionsvektor des Projektils als Funktion der Zeit ist $\vec{r}(t)$. Der Stoßparameter ist b, und $\phi(t)$ ist der Winkel zwischen $\vec{r}(t)$ und der Symmetrieachse $\vec{n}$. Der Streuwinkel θ ist der Winkel zwischen den ursprünglichen ($\vec{v}$) und endgültigen ($\vec{v}'$) Geschwindigkeitsvektor des Projektils.