Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung II

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

7.11.2008

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 9 *γ-Matrizen I*

Gegeben seien die γ-Matrizen nach PAULI und DIRAC. Zeigen Sie:

(i) $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{1}$

(ii) $\left(\gamma^k\right)^2 = -\mathbf{1}$, $k = 1,2,3$

(iii) $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

(iv) Berechnen Sie $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ und $\gamma^{5\dagger}$ mit $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Aufgabe 10 *Adjungierte* DIRAC-*Gleichung*

Zeigen Sie: Erfüllt der DIRAC-Spinor ψ die DIRAC-Gleichung

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0,$$

so erfüllt der adjungierte Spinor

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$$

die adjungierte DIRAC-Gleichung

$$i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} = 0.$$

Aufgabe 11 PAULI-*Gleichung als nichtrelativistischer Limes der* DIRAC-*Gleichung*

In den Hausaufgaben wird gezeigt, dass sich die DIRAC-Gleichung schreiben lässt als:

$$\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\vec{P} \\ \vec{\sigma}\vec{P} & -m \end{pmatrix}\psi = i\partial_t\psi.$$

Gegeben sei ein nichtrelativistisches Elektron der Geschwindigkeit v, dessen DIRAC-Spinor gegeben sei durch $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$, wobei ψ_A und ψ_B zweikomponentige Spinoren sind.

(i) Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die oberen Komponente des Spinors die PAULI-Gleichung folgt:

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\vec{P} + e\vec{A}\right)^2 + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - eA^0\right)\psi_A = E_{\text{kin}}\psi_A,$$

wobei E_{kin} die kinetische Energie des Elektrons ist. Dabei sei $A^\mu = (A^0,\vec{A})$ das aus der Elektrodynamik bekannte Viererpotenzial, also $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und $\vec{E}_{\text{el.}} = -\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}A^0$. Man nehme $\left|eA^0\right| \ll m$ und $E_{\text{kin}} \ll m$ an. Dazu mache man den Ansatz $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = e^{-iEt}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, ersetze $\vec{P} \mapsto \vec{P} + e\vec{A}$, $E \mapsto E + eA^0$ und eliminiere ψ_B.

(ii) Leiten Sie den gyromagnetischen Faktor des Elektrons ab. Nutzen Sie dafür die Beziehung zwischen Spin $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ und magnetischem Moment für das Elektron

$$\vec{\mu} \equiv -g\frac{e}{2m}\vec{S}.$$

Hinweise:

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b}), \text{ für } [\vec{a},\vec{\sigma}] = [\vec{b},\vec{\sigma}] = 0$$
$$\vec{P} = -i\vec{\nabla}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\psi) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\psi) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\psi$$

Hausaufgaben

Aufgabe 12 *γ-Matrizen II* **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass jeder Satz Matrizen α_i,β für $i = 1,2,3$, der die Bedingungen

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$$
$$\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = \mathbf{0}$$
$$\beta^2 = \mathbf{1}$$

erfüllt, folgende Eigenschaften besitzt:

(i) α_i,β sind spurlos,

(ii) α_i,β haben nur Eigenwerte ± 1 und sind selbstadjungiert (Hermitesch) sowie

(iii) α_i,β müssen von gerader Dimension sein.

Aufgabe 13 *Helizität in der* Dirac*-Gleichung* **7 Punkte**

(i) Konstruieren Sie den Hamilton-Operator H für die Dirac-Gleichung.
Tipp: Nutzen Sie die Identität $H \equiv p_0$.
Lösung: $H = \gamma^0(\vec{\gamma}\vec{p} + m) = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -m \end{pmatrix}$.

(ii) Zeigen Sie:

$$[\hat{h},H] = 0,$$

wobei $\hat{h} = \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ der Helizitätsoperator ist. Was folgt daraus ?

(iii) Gegeben sei nun ein Elektron mit beliebig ausgerichtetem Impuls $\vec{p}$. Konstruieren Sie die normierten die Eigenspinoren $u^{(+)}$ und $u^{(-)}$ zum Helizitätsoperator, die für Helizitäten $\pm 1/2$ stehen.
Hinweise:

a) Machen Sie den Ansatz $u^{(\pm)} \equiv a\cdot u^{(1)} + b\cdot u^{(2)}$, wobei $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ die in der Vorlesung gezeigten Lösungen der Dirac-Gleichung sind:

$$u^{(1)} = N\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+i\,p_y}{E+m} \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = N\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-i\,p_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

b) Das erhaltene Gleichungssystem ist unterbestimmt, die endgültige Lösung ergibt sich aus der Normierung der Eigenspinoren.

c) Führen Sie die Abkürzung $A = \frac{aN}{p_z\pm|\vec{p}|}$ und den Zweierspinor $u = \begin{pmatrix} p_z \pm |\vec{p}| \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}$ ein, um das Ergebnis vor der Normierung zu vereinfachen.

Aufgabe 14 *Operatoren* **6 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ nicht mit dem HAMILTONoperator H der DIRAC-Gleichung (siehe Aufgabe 13) vertauscht. Betrachten Sie dazu die einzelnen Komponenten von $\vec{L}$:

$$\left[x_k, \vec{P}_l\right] = i\delta_{kl} \;\Rightarrow\; \left[H, \vec{L}\right] = -i(\vec{\alpha} \times \vec{P})$$

(ii) Zeigen Sie analog

$$\left[H, \vec{\Sigma}\right] = 2i(\vec{\alpha} \times \vec{P})$$

und schließlich:

$$\left[H, \vec{J}\right] = 0 \text{ mit } \vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

(iii) Zeigen Sie, dass jeder DIRAC-Spinor ein Eigenzustand zu $\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right)^2$ mit Eigenwert $s \cdot (s+1)$ ist und bestimmen Sie s. Wie groß ist demnach der Spin eines Teilchens, welches durch die DIRAC-Gleichung beschrieben wird ?

Aufgabe 15 *Transformationsmatrix S für Wellenfunktionen* **4 Punkte**

Gegeben sei die Basislösung der DIRAC-Gleichung für Teilchen mit Spin-Ausrichtung „up“:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{E+m}} u_1(p) \exp\left(-ip \cdot x\right)$$

(i) Berechnen Sie explizit das Transformationsverhalten von ψ_1 unter einer Ladungskonjugation:

$$\psi'_C = i\gamma^2\psi^*.$$

(ii) Berechnen Sie explizit das Transformationsverhalten von ψ_1 unter Zeitumkehr:

$$\psi'_T = i\gamma^1\gamma^3\psi^*.$$