Albert-Ludwigs-Universität Freiburg | Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung III

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

14.11.2008

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 16 FEYNMAN-*Slash I*
Beweisen Sie die folgenden Identitäten für Matrizen $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu = \gamma^\mu a_\mu$ und die γ-Matrizen:

(i) $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$
(ii) $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$

Erinnerung:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Aufgabe 17 GREEN-*Funktion als Propagator*
Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Lösung der DIRAC-Gleichung für $E > 0$

$$\psi(\vec{x}',t') = u(k)\exp(-ik_0 t' + i\vec{k}\cdot x')$$

zu einer Zeit $t > t'$ über die GREEN-Funktion für $E > 0$

$$K(x - x') = -i(2\pi)^{-3}\int d^3p \exp\left[i\vec{p}\cdot(\vec{x} - \vec{x}') - iE(t - t')\right]\frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m}{2E}$$

aus $\psi(\vec{x}',t')$ folgt, nicht aber für $t < t'$.

$$\stackrel{\text{z.zg.}}{\Longrightarrow} i\int d^3x' K(x - x')\gamma^0\psi(\vec{x}',t') = \begin{cases} \psi(\vec{x},t) \text{ für } t > t' \\ 0 \text{ für } t < t' \end{cases}$$

Für $t < t'$ ist dabei der „Rückwärts-Propagator“

$$K_{\text{rückw.}}(x - x') = -i(2\pi)^{-3}\int d^3p \exp\left[i\vec{p}\cdot(\vec{x} - \vec{x}') + iE(t - t')\right]\frac{-\gamma^0 E - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m}{2E}$$

zu benutzen.

Hinweise:

$$(2\pi)^{-3}\int d^3x' \exp(i(\vec{k} - \vec{p})\cdot\vec{x}') = \delta^3(\vec{k} - \vec{p})$$

$$(\not{k} - m)u(k) = 0$$

Aufgabe 18 *Transformationsmatrix S für Wellenfunktionen I*
Zeigen Sie die Gültigkeit von $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$ für folgende drei Transformationen:

(i) einen LORENTZ-Boost,
(ii) eine Rotation um einen Winkel θ und
(iii) die Paritätstransformation.

Hinweise:

(i) Lorentz-Boost in z-Richtung

$$S_{\mathrm{Lor}} = \exp\left(-\frac{\omega}{2}\gamma^0\gamma^3\right) = \mathbf{1}_4 \cosh\frac{\omega}{2} - \gamma^0\gamma^3 \sinh\frac{\omega}{2} \tag{1}$$

$$S_{\mathrm{Lor}}^{-1} = \exp\left(+\frac{\omega}{2}\gamma^0\gamma^3\right) = \mathbf{1}_4 \cosh\frac{\omega}{2} + \gamma^0\gamma^3 \sinh\frac{\omega}{2}, \tag{2}$$

mit $\cosh\omega = \gamma = \frac{E}{m}$, $\sinh\omega = \beta\gamma = \frac{|\vec{p}|}{m}$.

(ii) Drehung um θ um z-Achse:

$$S_{\mathrm{Rot}} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\gamma^1\gamma^2\right) = \mathbf{1}_4 \cos\frac{\theta}{2} - \gamma^1\gamma^2 \sin\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

$$S_{\mathrm{Rot}}^{-1} = \exp\left(+\frac{\theta}{2}\gamma^1\gamma^2\right) = \mathbf{1}_4 \cos\frac{\theta}{2} + \gamma^1\gamma^2 \sin\frac{\theta}{2}, \tag{4}$$

(iii) Paritätstransformation:

$$S_P = \gamma^0 \tag{5}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 19 FEYNMAN-*Slash II* **5 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für Matrizen $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu = \gamma^\mu a_\mu$:

(i) $\{\not{a},\not{b}\} = 2a_\mu b^\mu$

(ii) $(\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2$ mit dem Viererimpuls p

(iii) $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a_\mu b^\mu$

(iv) $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4\left[(a_\mu b^\mu)(c_\nu d^\nu) - (a_\mu c^\mu)(b_\nu d^\nu) + (a_\mu d^\mu)(b_\nu c^\nu)\right]$

Aufgabe 20 *Transformationsmatrix S für Wellenfunktionen II* **6 Punkte**

Verifizieren Sie die aus der Vorlesung bekannte Gleichung für eine LORENTZ-Transformation in z-Richtung für $\nu = 0{,}1{,}2{,}3$:

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S_{\mathrm{Lor}}^{-1} \gamma^\nu S_{\mathrm{Lor}}$$

Aufgabe 21 *Bilineare Kovarianten* **4 Punkte**

Aus der Vorlesung sind die bilinearen Kovarianten bekannt, die sich als quadratische Formen der Spinorkomponenten ergeben:

$$\sum_{i,j} a_{ij} \Psi_i^* \Psi_j$$

(i) Zeigen Sie die Invarianz eines Pseudoskalars $p = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ unter einem LORENTZ-Boost sowie unter einer Rotation um einen Winkel θ.

(ii) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten eines Axialvektors $a^\mu = \bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\Psi$ unter einem LORENTZ-Boost sowie unter einer Rotation um einen Winkel θ.

Aufgabe 22 *Vollständigkeitsrelation* **4 Punkte**

Beweisen Sie durch explizites Nachrechnen bzw. Einsetzen der Lösungen der DIRAC-Gleichung aus der Vorlesung:

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\overline{u}^{(s)} = \not{p} + m \tag{6}$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}\overline{v}^{(s)} = \not{p} - m, \tag{7}$$

wobei p der Viererimpuls und m die Masse des Teilchens ist.

Aufgabe 23 *Projektionsoperatoren* **1 Punkte**

Gegeben seien die Operatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \qquad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5).$$

Zeigen Sie:

(i) $P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R$

(ii) $P_L + P_R = 1$

(iii) $P_L P_R = 0$