Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung VI

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

5.12.2008

ACHTUNG: Aufgabe 30 enthält eine wichtige Korrektur gegenüber dem in der Übung ausgegebenen Zettel. Ebenso wurde in Aufgabe 31 der numerische Wert der Tritiummasse ergänzt. Wir bitten um Entschuldigung !

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 28 *Wiederholung: Schleifendiagramme in der QED*

(i) Zeichnen Sie die FEYNMAN-Diagramme führender Ordnung (BORN-Niveau) sowie die Diagramme nächsthöherer Ordnung (NLO, next to leading order) für die Wechselwirkung eines Elektrons mit einer statischen Ladung. In welcher Potenz tritt α in den jeweiligen Ausdrücken für die Matrixelemente auf?

(ii) Markieren Sie die Diagramme, die zum Propagator- bzw. zum Selbstenergieterm beitragen.

(iii) Welche Diagramme sind für
   a) die LAMB-Shift bzw.
   b) die Abweichung des gyromagnetischen Moments des Elektrons vom Zahlenwert 2

   verantwortlich?

(iv) Geben Sie an, welche FEYNMAN-Diagramme des LAMB-Shift-Effekts positiv und welche negativ zur Energie des Zustandes beitragen. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 29 *Schleifendiagramme in der QED*

(i) Betrachten Sie den Vertexkorrekturterm zur Wechselwirkung eines Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld A_μ. Im Grenzfall kleiner Impulsüberträge q^2 ist der endliche Anteil des Stromes durch

$$e\bar{u}_f \left\{ \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{m_\gamma} - \frac{3}{8} \right) \right] - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{2m} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \right\} u_i$$

gegeben. Dabei is m_γ die Masse des virtuellen Photons.
Benutzen Sie die GORDON-Zerlegung

$$e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{e}{2m} \bar{u}_f \left[\left(p_f^\mu + p_i^\mu \right) + i\sigma^{\mu\nu} \left(p_{f\,\nu} - p_{i\,\nu} \right) \right] u_i$$

und identifizieren Sie die Terme $\sim i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ als magnetisches Moment $\vec{\mu}$. Zeigen Sie damit, dass die Vertexkorrektur zu

$$\frac{g-2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi}$$

führt.

Hausaufgaben

Aufgabe 30 *Korrekturen höherer Ordnung* **8 Punkte**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Vakuumpolarisationsschleife im Photonpropagator zu einer Korrektur zum Vertexfaktor führt:

$$\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \longmapsto \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} I_{\mu\nu} \frac{-i}{q^2}$$

mit

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= i g_{\mu\nu} q^2 I(q^2) \\ &= i g_{\mu\nu} q^2 \left\{ \frac{\alpha}{3\pi} \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 dz\, z(1-z) \ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2} z(1-z)\right) \right\}. \end{aligned}$$

Der erste Term in der Klammer wurde bestimmt als

$$\frac{\alpha}{3\pi} \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

mit dem Abschneideparameter $\Lambda \to \infty$. Im Folgenden wird angenommen, das nur Elektronen in der auftretenden Fermionschleife relevant sind.

(i) Berechnen Sie den zweiten Term von $I(q^2)$ für die beiden Grenzfälle $-\frac{q^2}{m^2} \gg 1$ und $-\frac{q^2}{m^2} \ll 1$. Tipp: Erst nähern, dann integrieren. Natürlich kann man das Integral auch geschlossen lösen, wir raten aber davon ab.

(ii) Nutzen Sie das Ergebnis aus (i), um das Matrixelement für $e^-\mu^-$-Streuung

$$-i\mathfrak{M} = ie\bar{u}\gamma^\mu u \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} ie\bar{u}\gamma^\nu u$$

für $\frac{q^2}{m^2} \ll 1$ mittels folgender Ersetzung umzuschreiben:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \mapsto \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} iq^2 I(q^2) \frac{-i}{q^2} \quad \Rightarrow \quad -i\mathfrak{M} = ie_R\bar{u}\gamma^\mu u \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right) ie_R\bar{u}\gamma^\nu u.$$

Dabei ist

$$e_R = e\sqrt{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}$$

die renormierte Ladung des Elektrons. Der zweite Term in der Klammer im Matrixelement gibt einen Beitrag zum Lamb-Shift.

Aufgabe 31 *Tritiumzerfall und Neutrinomasse* **6 Punkte**

Beim Karlsruher Tritium Neutrino Experiment KATRIN soll der β-Zerfall von Tritium

$${}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}^+ + e^- \bar{\nu}_e$$

gemessen werden, um die Masse des Elektron-Antineutrinos $\bar{\nu}_e$ zu bestimmen.
Betrachten Sie zunächst den Dreikörperzerfall $A \to b + c + d$.

(i) Geben Sie die Energie E_b von Teilchen b in Abhängigkeit der Massen von A, b und der invarianten Masse von Teilchen c und d an. Tipp: Übung 1 !

(ii) Wann wird E_b maximal, wann minimal ? Wie lauten die entsprechenden Formeln ? Skizzieren Sie die zugehörigen Situationen. Tipp: Invariante Massen sind lorentzinvariant !

(iii) Betrachten Sie nun den oben angegebenen Tritium-Zerfall.

a) Wie groß ist die maximale Gesamtenergie der Elektronen im Falle masseloser Neutrinos, wenn die Massendifferenz zwischen ^{3}H und ^{3}He $\Delta = 0.5296\,\mathrm{MeV}$ beträgt ($m_e = 0.510999\,\mathrm{MeV}$, $m_{^3\mathrm{H}} = 2809\,\mathrm{MeV}$)? Wie groß ist die maximale kinetische Energie?

b) Wie groß sind die maximale Gesamt- und kinetische Energie des ^{3}He-Kerns ? Spielt die Rückstossenergie eine Rolle ? Wie ist es mit dem Rückstossimpuls?

c) Gegeben sei die gemessene Maximalenergie der Elektronen. Wie groß ist dann die Masse des emittierten Antineutrinos (Formel)?

Aufgabe 32 *Chiralität und Helizität* **6 Punkte**

Betrachtet seien die Chiralitätsprojektionsoperatoren

$$P_L \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \gamma^5\right) \qquad\qquad P_R \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \gamma^5\right).$$

(i) Zeigen Sie, dass die bilineare Kovariante γ^5 im Falle massebehafteter Fermionen nicht mit dem Hamilton-Operator kommutiert, also

$$\left[H,\gamma^5\right] \neq 0$$

gilt. Berechnen Sie die Kommutatoren $[H,P_{L,R}]$ der Chiralitätsprojektionsoperatoren mit dem Hamilton-Operator. Schlussfolgern Sie daraus, dass die Händigkeit keine „gute“ Quantenzahl ist.

Hinweis: Schreiben Sie α, β und γ^5 in ihren jeweiligen Matrixformen:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

In einer vorherigen Übungsaufgabe wurde bereits gezeigt, dass der Helizitätsoperator $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$ im Gegensatz zum Chiralitätsoperator mit dem Hamilton-Operator kommutiert und somit die Helizität eine „gute“ Quantenzahl ist.

(ii) Gehen Sie vom Spinor $u_1(\vec{p})$ eines massiven Dirac-Teilchens mit $\vec{p} = (0,0,|\vec{p}\,|)$ aus. Zeigen Sie, dass der Spinor $u_1(\vec{p}\,')$ nach einem Lorentz-Boost in ein Bezugssystem mit $\vec{p}\,' = (0,0,-|\vec{p}\,|)$ (wo sich das Teilchen in die entgegen gesetzte Richtung bewegt) die entgegengesetzte Helizität besitzt, also gilt:

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}u_1(\vec{p}) \rightarrow -\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\,'u_1(\vec{p}\,').$$