Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung VIII

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

19.12.2008

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 37 *Dreikörperphasenraum*

Betrachtet sei der Zerfall des Myons

$$\mu^-(p_1) \to e^-(p_4) + \bar{\nu}_e(p_2) + \nu_\mu(p_3). \tag{1}$$

Fermi's Goldene Regel für Zerfälle ergibt dann für die Zerfallsrate im Ruhesystem des Myons:

$$d\Gamma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\mu} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2|\vec{p}_2|} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2|\vec{p}_3|} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2|\vec{p}_4|} \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4). \tag{2}$$

Im folgenden soll der Phasenraumfaktor ausgerechnet werden, wobei die Masse des Elektrons und die der Neutrinos vernachlässigt werden soll.

(i) Spalten Sie die δ-Funktion in den Energie- und die drei Impulsanteile auf und integrieren Sie über den Impuls $\vec{p}_3$.

(ii) Führen Sie als nächstes die Integration über $\vec{p}_2$ aus. Legen Sie dazu die Polarachse in Richtung von $\vec{p}_4$ und führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus. Führen Sie zur Vereinfachung die Ersetzung $u^2 = |\vec{p}_2 + \vec{p}_4|^2$ ein, und schreiben Sie dies in Abhängigkeit der Energien und des Polarwinkels.

(iii) Wie lauten in der Variablen u ausgedrückt die Integrationsgrenzen? Für welche Werte von $(m_\mu - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_4|)$ ist das Integral ungleich von Null?

(iv) Benutzen Sie den erhaltenen Ausdruck, um die Maximalwerte von $|\vec{p}_2|$ und $|\vec{p}_4|$ und den Minimalwert von $|\vec{p}_2| + |\vec{p}_4|$ zu berechnen.

Die partielle Zerfallsbreite ergibt sich dann zu:

$$d\Gamma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{16(2\pi)^4 m_\mu} d|\vec{p}_2| \frac{d^3\vec{p}_4}{|\vec{p}_4|^2}. \tag{3}$$

Aufgabe 38 *Zerfallsrate des D^0-Mesons*

(i) D^0-Mesonen können auf folgende Arten zerfallen:

- $D^0 \to K^- \pi^+$
- $D^0 \to \pi^- \pi^+$
- $D^0 \to K^+ \pi^-$

Die Quarkinhalte der genannten Teilchen sind: $D^0 = c\bar{u}$, $K^- = s\bar{u}$, $\pi^+ = u\bar{d}$ und $\pi^- = d\bar{u}$. Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme der drei Zerfallsprozesse und beschriften Sie die Quark-Vertices mit ihren jeweiligen Cabibbo-Faktoren. Bestimmen Sie daraus das Verhältnis der Zerfallsraten der drei Kanäle.

(ii) Die Zerfallsrate des Prozesses $K^+ \to \pi^0\, e^+\, \nu_e$ ist $\Gamma = 4 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$. Zeichnen Sie die FEYNMAN-Diagramme dieses Zerfalls und des Zerfalls $D^0 \to K^-\, e^+\, \nu_e$. Benutzen Sie die Beziehung

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{30\pi^3} (\Delta m)^5 V_{qq'}^2,$$

um die Zerfallsrate des Prozesses $D^0 \to K^-\, e^+\, \nu_e$ zu bestimmen. Dabei ist Δm die Massendifferenz der Mesonen im Anfangs- und Endzustand.

Hausaufgaben

Aufgabe 39 *Myonzerfall* **8 Punkte**

Betrachtet sei der Myonzerfall

$$\mu^-(p_1) \to e^-(p_4) + \bar{\nu}_e(p_2) + \nu_\mu(p_3). \tag{4}$$

(i) Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm niedrigster Ordnung für diesen Prozess.

(ii) Zeigen Sie in der Fermi-Theorie, das sich die zerfallsamplitude ergibt als:

$$\mathfrak{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_3\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_1\right] \left[[\bar{u}_4\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_2\right] \tag{5}$$

(iii) Benutzen Sie Casimirs Trick und die Beziehung

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_3\right] \times \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_2\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}_4\right] = 256(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4), \tag{6}$$

um zu zeigen, dass sich das spingemittelte Matrixelement ergibt zu:

$$\frac{1}{2}|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 64G_F^2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4). \tag{7}$$

(iv) Zeigen Sie, das im Ruhesystem des Myons gilt:

$$\frac{1}{2}|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 32G_F^2 m_\mu^2|\vec{p}_2|(m_\mu - 2|\vec{p}_2|). \tag{8}$$

(v) Kombinieren Sie das Ergebnis mit demjenigen für die differentielle Zerfallsbreite aus der Anwesenheitsaufgabe, um die Zerfallsrate des Myons zu berechnen. Integrieren Sie dazu zunächst über $|\vec{p}_2|$ und danach über $\vec{p}_4$ mit $d^3\vec{p}_4 = 4\pi|\vec{p}_4|^2d|\vec{p}_4|$.

(vi) Benutzen Sie $G_F = 1{,}166\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$, um die Lebensdauer des Myons zu berechnen.

Aufgabe 40 *W-Propagator* **3 Punkte**

Der W-Propagator ist aus der Vorlesung bekannt als:

$$\frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)}{p^2 - m_W^2}.$$

Dabei ist m_W die Masse des W-Bosons.

Betrachten Sie den Elektron-Neutrino-Streuprozess

$$\nu_\mu(p_1)\, e^-(p_2) \to \mu^-(p_3)\, \nu_e(p_4).$$

Das Streumatrixelement dieses Prozesses ist

$$\mathfrak{M} \sim \bar{u}(p_3)\gamma_\mu(\mathbf{1}-\gamma^5)u(p_1)\left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2}\right)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu(\mathbf{1}-\gamma^5)u(p_2).$$

Dabei ist $q^\mu = (p_1 - p_3)^\mu$ und $q^\nu = (p_4 - p_2)^\nu$.

(i) Zeigen Sie, dass die zu $\frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}$ proportionalen Terme geschrieben werden können als:

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{m_\mu m_e}{m_W^2}\frac{1}{q^2 - m_W^2}\left[\bar{u}(p_3)(\mathbf{1}-\gamma^5)u(p_1)\bar{u}(p_4)(\mathbf{1}-\gamma^5)u(p_2)\right].$$

(ii) Zeigen Sie, dass dieser Term vernachlässigt werden kann.

Hinweis: Nutzen Sie die kovariante Form der Dirac-Gleichung, um die Terme $\bar{u}\not{p}$ und $\not{p}u$ umzuschreiben.

Aufgabe 41 *Propagator eines massiven Vektorbosons* **4 Punkte**

Die Wellengleichung eines Spin-1-Teilchens der Masse m ist durch die PROCA-Gleichung gegeben:

$$\left[\left(\Box + m^2\right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right] w_\nu(x) = J^\mu(x).$$

Wie bereits früher ausgenutzt, lässt sich die FOURIER-Transformation der GREEN-Funktion nutzen, um den Propagator des Feldes $w_\nu(x)$ zu berechnen. Gehen Sie von der GREEN-Funktion aus:

$$w_\nu(x) = \int d^4x' D_{\nu\lambda}(x - x') J^\lambda(x'),$$

wobei $D_{\nu\lambda}$

$$\left[\left(\Box + m^2\right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right] D_{\nu\lambda}(x - x') = \delta^\mu_\lambda \delta^4(x - x') \tag{9}$$

erfüllt. Dabei ist δ^μ_λ das KRONECKER-Delta.

(i) Setzen Sie die FOURIER-Transformierte von $D_{\nu\lambda}$ im Impulsraum

$$D_{\nu\lambda}(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{\nu\lambda}(q) \exp\left[-iq(x - x')\right]$$

in (9) ein. Zeigen Sie, dass $\tilde{D}_{\nu\lambda}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\left[\left(-q^2 + m^2\right) g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right] \tilde{D}_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda. \tag{10}$$

(ii) Gehen Sie von der Form

$$\tilde{D}_{\nu\lambda} = A g_{\nu\lambda} + B q_\nu q_\lambda$$

aus. Nutzen Sie (10) aus, um die Werte von A und B zu bestimmen. Zeigen Sie schließlich, dass $\tilde{D}_{\nu\lambda}$ die Form

$$\tilde{D}_{\nu\lambda} = \frac{-g_{\nu\lambda} - \frac{q_\nu q_\lambda}{m^2}}{q^2 - m^2}$$

annimmt.

Aufgabe 42 *CP-Invarianz und -Verletzung* **5 Punkte**

(i) Um CP-Invarianz zu prüfen, betrachten Sie die Amplituden für den Streuprozess von Quarks $ab \to cd$ mittels des geladenen schwachen Stroms sowie den äquivalenten Prozess für Antiquarks $\bar{a}\bar{b} \to \bar{c}\bar{d}$. Schreiben Sie die Streuamplitude

$$M \sim J^\mu_{ca} J^\dagger_{bd,\mu}$$

auf, wobei

$$J^\mu_{ca} = \bar{u}_c \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ca} u_a$$

ist. U_{ca} ist das CKM-Matrixelement für einen Vertex $a \to c$.
Schreiben Sie anschließend die Amplitude für den Streuprozess der Antiquarks $\bar{a}\bar{b} \to \bar{c}\bar{d}$:

$$M' \sim (J^\mu_{ca})^\dagger J_{bd,\mu}.$$

Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Amplituden M und M'?

(ii) Der Strom J^μ_{ca} transformiert sich unter einer kombinierten CP-Transformation wie folgt (nicht nachrechnen):

$$(J^\mu_{ca})_{CP} = -U_{ca} \bar{u}_a \gamma^{\mu\dagger} (1 - \gamma^5) u_c \tag{11}$$

Bestimmen Sie damit die Streuamplitude

$$M_{CP} \sim (J^\mu_{ca})_{CP} (J_{bd,\mu})^\dagger_{CP}$$

des CP-transformierten Prozesses.

(iii) Welche Bedingungen für die CKM-Matrixelemente U_{ca}, U_{db} müssen erfüllt sein, damit die CP-Symmetrie ungebrochen ist?
Wann ist die CP-Symmetrie verletzt?
Kann man CP-Verletzung mit nur 2 Familien von Quarks erhalten?
Wie sieht es bei 3 Familien aus?