Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2009

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung V

Matthew Beckingham und Henrik Nilsen

26.11.2009

Computerübung

Aufgabe 18 *Zufallsgenerator für einen Teilchenzerfall*

In dieser Übung werden wir die Transformationsmethode anwenden, um Zufallszahlen $\vec{x}$ zu erzeugen, die gemäß der Exponentialverteilung

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{x}{\tau}\right) \tag{1}$$

verteilt sind. Die Variablen $\vec{x}$ könnten beispielsweise die Zerfallszeiten eines Teilchens mit Lebensdauer τ repräsentieren.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Erzeugen Sie gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1, indem Sie den in ROOT implementierten Zufallsgenerator `TRandom3`

```
TRandom3::Uniform(Double_t x1, Double_t x2)
```

benutzen.

(ii) Benutzen Sie die Transformationsmethode, um die gleichverteilten Zufallszahlen $\vec{r}$ in exponentiell verteilte Zufallszahlen umzuwandeln. Die Transformationsfunktion lautet

$$x(r) = -\tau \ln r. \tag{2}$$

(iii) Füllen Sie die erzeugten Werte für x_i und r_i in Histogramme und ausserdem in einen ROOT-Tree. Ein Beispiel dafür, wie man Variablen in einen `TTree` einfüllt, ist im Makro `ExpGen_i.x` enthalten.

(iv) Erzeugen Sie exponentiell verteilte Zufallsvariablen für ein festes τ $(0 \leq \tau \leq 5)$ mit einem Stichprobenumfang von 100, aber lassen Sie niemanden sonst den benutzten Wert für τ wissen!

In einen Aufgabe in Zwei Wochen sollten Sie Ihre erzeugte ROOT-Datei mit einem anderen Übungsteilnehmer tauschen, und versuchen herauszufinden, welchen Wert von τ der jeweils andere benutzt hat. Dazu werden wir die Log-Likelihood Methode verwenden die nächste Worche in der Vorlesung vorkomt.

Aufgabe 19 *Integration mit der „Hit and Miss"-Methode*

In dieser Übung werden wir die „Hit and Miss"-Methode benutzen, um das Integral einer einfache eindimensionalen Funktion, und danach für eine schwierigere zweidimensionale Funktion, zu berechnen.

Die eindimensionale Funktion ist

$$f(x) = x, \tag{3}$$

mit $0 < x < 1$. Die zweidimensionale Funktion ist

$$g(x,y) = |x * cos(y) + y * cos(x)|, \tag{4}$$

mit $-5 < x < 5$ und $-5 < y < 5$.

(i) Stellen Sie eine eindimensionale Funktion vom Typ `TF1` für $f(x)$ bereit

```
TF1* func = new TF1("func", "x", 0, 1);
```

und zeichnen Sie die Funktion mit

```
func->Draw();
```

(ii) Bestimmen Sie die Integral von $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = 1$ mit Hilfe der „Hit and Miss"-Methode. Wie viele Punkte braucht man, um eine gute Abschätzung für des Integral zu bekommen?

Hinweis: Für ein `TF1` Objekt enthält man den Funktionswert für einen gegebenen x-Wert mittels

```
TF1::Eval(Double_t x)
```

(iii) Stellen Sie eine zweidimensionale Funktion vom Typ `TF2` für $g(x,y)$ bereit:

```
TF2* func = new TF2("func", "TMath::Abs(y*cos(x)+x*cos(y))", -5, 5, -5, 5);
```

und zeichne der Funktion mit Draw().

(iv) Bestimmen Sie das Integral von $g(x,y)$ über den Bereich $-5 \leq x,y \leq 5$ mit der „Hit and Miss"-Methode. Wie viele Punkte braucht man um einen stabielen Wert für das Integral zu bekommen?

Aufgabe 20 *Schätzer und WDFs: Erwartungstreue, Effizienz und Verzerrung*

Im Datei `Robustheit_i.x` befindet sich ein fast fertiges Root-Makro um Erwartungstreue, Effizienz und Verzerrung von unterschiedlichen Schätzern und WDFs zu studieren. Um das Makro auszuführen, geben Sie folgende Kommandos in Root ein:

```
.L Robustheit_i.x
Robustheit( WDF-Name, # Stichproben, # Werte per Stichprobe)
```

Die möglichen WDF-Namen sind "Gauss" ($\mu = 1$, $\sigma = 1$), "Uniform" ($[-1,1]$), "Exp" ($\tau = 1$, i.e. e^{-x}) und "BreitWigner" ($\Gamma = 1$, $x_0 = 1$). Um z.B. får eine gaussische WDF und eine einzige Stichprobe von Umfang 10 auszuführen, geben Sie

```
Robustheit( ‘‘Gauss’’, 1, 10)
```

in Root ein.

Aufgaben:

(i) Das Makro enthält halbfertige Funktionen, um den aritmetischen Mittelwert, den Median, (grösstes-kleinstes)/2 und den multiplikativen Mittelwert ($[\prod_{i=1}^{n} x_i]^{1/n}$) zu berechnen. Die Funktionen müssen fertiggeschrieben werden. Wenn man

```
Robustheit( ‘‘Gauss’’, 1, 10)
```

ausführt, sieht man die Werte der Stichprobe und den berechneten Wert, der zu 0 oder 1 initialisiert wird.

(ii) Lassen Sie für jede der vier WDFs das Makro für 1000 Stichproben vom umfang 100 laufen. Versuchen Sie die Unterschiede zwischen den WDFs der 4 Schätzer des Erwartungswertes der WDF zu verstehen (für Breit-Wigner: die geschätzte Grösse ist der Symmetriepunkt – der Erwartungswert ist nicht endlich). Welche Schätzern sind: Erwartungstreu? Am Effizientesten? Ohne Verzerrung?

(iii) Gibt es einen Fall, wo ein Schätzer mit Verzerrung zu bevorzugen ist gegenüber einem der unverzerrten Schätzern?

(iv) Falls Sie eine Stichprobe einer unbekannten WDF hätten, welcher Schätzer für den Erwartungswert der Grundgesamtheit wäre die beste Wahl gewesen?