

Bachelorarbeit

Vergleich von Methoden zum Test der
CP-Invarianz der Higgs-Bosonproduktion in
Vektorbosonfusion $pp \longrightarrow Hjj$

Severin Sylla

Betreut von:

Prof. Dr. Markus Schumacher

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik

13. August 2019

Erklärung

Hiermit versichere ich, die eingereichte Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Wörtlich oder inhaltlich verwendete Quellen wurden entsprechend den anerkannten Regeln wissenschaftlichen Arbeitens (lege artis) zitiert. Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht anderweitig als Bachelorarbeit eingereicht wurde.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik	3
2.2	Die elektroschwache Theorie	4
2.3	Der Brout-Englert-Higgs-Mechanismus	5
2.4	CP-Symmetrie	6
2.5	Erweiterung des Standardmodells	7
2.6	Signalprozess	8
2.7	Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von \tilde{d}	9
2.8	CP-sensitive Observablen	10
2.8.1	Der vorzeichenbehaftete Azimuthalwinkel $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	10
2.8.2	Die optimale Observable \mathcal{O}	10
3	Experiment	12
3.1	Der Large Hadron Collider	12
3.2	Der ATLAS-Detektor	12
4	Ereignisgeneration	15
4.1	Erwartete Verteilung	15
4.2	Pseudoexperimente	16
4.3	Untergrund	16
4.4	Theorievorhersage für beliebige \tilde{d} mittels Interpolation	16
5	Statistische Methoden	18
5.1	Maximum-Likelihood-Methode	18
5.2	Konfidenzgürtel und Konfidenzintervalle	19
5.2.1	Konstruktion exakter Konfidenzintervalle	19
5.3	Konstruktion mittels Profillikelihood	20
5.4	Poisson-Likelihoodfunktion	21
5.5	Skellam-Likelihoodfunktion	22
6	Methoden für Test der CP-Invarianz	27
6.1	Bestimmung von \tilde{d} aus der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen	27
6.2	Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung	29
6.3	Bestimmung von \tilde{d} aus dem Mittelwert der Observablenverteilung	30
7	Abhängigkeit der Observablenverteilung von \tilde{d}	33
7.1	Observablenverteilung unter Berücksichtigung der \tilde{d} -Abhängigkeit der Ereignisanzahl N	33
7.2	Observablenverteilung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl	37

8	Bestimmung von \tilde{d} aus den Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	43
8.1	Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung	43
8.2	Maximum-Likelihood-Anpassung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl	48
8.3	Erweiterte Maximum-Likelihood-Methode unter Berücksichtigung eines Untergrundes	49
9	Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung	53
9.1	Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung	53
9.2	Maximum-Likelihood-Anpassung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl	57
9.3	Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung unter Berücksichtigung eines Untergrundes	58
10	Bestimmung von \tilde{d} aus dem Mittelwert der Observablenverteilung	62
11	Vergleich der Methoden zur Bestimmung von \tilde{d}	65
11.1	Schätzer und Konfidenzintervalle	65
11.2	Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten	68
12	Zusammenfassung	70
A	Anhang: Tabellen der aus der Verteilung von \hat{d} bestimmten Schätzer und Konfidenzintervalle mit Unergrund	72
A.1	Für \mathcal{OO} erhaltene Ergebnisse	72
A.1.1	EML-Anpassung an die Observablenverteilung	72
A.1.2	EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung	73
A.2	Für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhaltene Ergebnisse	74
A.2.1	EML-Anpassung an die Observablenverteilung	74
A.2.2	EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung	75
	Literaturverzeichnis	78

1 Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt die fundamentalen Bestandteile der Materie und ihre Wechselwirkungen. Im Standardmodell sind mit der starken, der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen der Natur enthalten. Nach der Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung in der elektroschwachen Theorie durch S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg blieb die Frage offen, wie die experimentell beobachtete Masse der Leptonen und der elektroschwachen Eichbosonen zu erklären ist [1, 2, 3]. Die von R. Brout, F. Englert, P. Higgs, G. Guralnik, C.R. Hagen und T. Kibble vorgeschlagene Lösung des Problems implizierte die Existenz eines neuen Teilchens, welches heute Higgs-Boson genannt wird [4, 5, 6, 7, 8]. In den Experimenten CMS [9] und ATLAS [10] am *Large Hadron Collider* (LHC) [11] konnte 2012 ein Teilchen nachgewiesen werden, das die vorhergesagten Eigenschaften des Higgs-Bosons besitzt [12, 13].

Obgleich heute präzise Messungen eine gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Standardmodells zeigen [14], wird weiterhin nach einer umfassenderen Theorie gesucht, welche die Vorhersagen des Standardmodells im Grenzfall der heute experimentell erreichbaren Energieskalen reproduziert. Der Grund für diese Suche sind theoretische und auf der Beobachtung des Universums basierende Fragen fundamentaler Natur, welche durch das Standardmodell nicht beantwortet werden. Ein Beispiel hierfür ist die beobachtete Baryonenasymmetrie im Universum, welches heute eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Physik darstellt.

Durch die Tatsache begründet, dass im beobachtbaren Teil des Universums fast keine Antimaterie zu finden ist, ergibt sich die Frage, wie es zu dieser Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie kommt. A.D. Sakharov formulierte drei notwendige Bedingungen für die Entstehung der Baryonenasymmetrie im frühen Universum [15, 16, 17]. Eine dieser Bedingungen ist die CP-Verletzung. Messungen der komplexen Phase der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, welche im Standardmodell die einzige Quelle der CP-Verletzung darstellt, ergeben zu kleine Werte, um die Baryonenasymmetrie im beobachtbaren Universum zu erklären [18, 19].

Die präzise Vermessung der CP-Eigenschaften des Higgs-Bosons ist ein vielversprechender Ansatz, und das nicht nur für das Verständnis der Baryonenasymmetrie, sondern auch, um weitere Erkenntnisse über die Physik jenseits des Standardmodells zu gewinnen. Messungen aus *Run-1* des LHC bei einer Schwerpunktenenergie von $\sqrt{s} = 8\text{TeV}$ lieferten ein Ergebnis, dass auf einem Konfidenzniveau von 68% mit der CP-Invarianz der Produktion des Higgs-Bosons mittels Vektorbosonfusion verträglich ist [20]. Eine präzisere Messung soll der Datensatz aus *Run-2* bei einer Schwerpunktenenergie von $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ ermöglichen.

In der vorliegenden Arbeit werden im Hinblick auf die Auswertung der Daten aus *Run-2* anhand von simulierten Ereignissen statistische Methoden zum Test der CP-Invarianz verglichen. Hierbei wird zur Bestimmung der Stärke der CP-Verletzung ein neuartiger Ansatz angewandt. Dieser Ansatz erlaubt eine Maximum-Likelihood-Anpassung der aus einer Effektiven Feldtheorie erhaltenen Vorhersage für die Asymmetrie der Verteilungen CP-ungerader Observablen an ein beobachtetes Signal. Es ist zu erwarten, dass CP-verletzende Physik jenseits

des Standardmodells nichtverschwindende ungerade zentrale Momente in der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen erzeugt. Die Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung erlaubt damit einen reinen Test der CP-Invarianz. Es wird dabei kein Einfluss CP-erhaltender Physik jenseits des Standardmodells auf die Messung erwartet. Auch für CP-invariante Untergrundprozesse wird erwartet, dass sie symmetrische Verteilungen CP-ungerader Observablen besitzen. Die Ergebnisse des neuen Ansatzes zum Test der CP-Invarianz werden mit denen aus einer Maximum-Likelihood-Anpassung an die volle Verteilung CP-ungerader Observablen sowie mit den aus einer Betrachtung des Mittelwertes der Verteilung erhaltenen Werten verglichen. Der Schwerpunkt dieser Studie liegt dabei auf der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung (EML) an die Observablenverteilung sowie an ihre Asymmetrie.

Die Gliederung dieser Arbeit gestaltet sich wie folgt. Zunächst ist in Kapitel 2 eine Einführung in die theoretischen Aspekte des Standardmodells und dessen Erweiterung mittels einer effektiven Feldtheorie zur Beschreibung CP-verletzender neuer Physik gegeben. Kapitel 3 fasst die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften des LHC und des ATLAS-Detektors zusammen. In Kapitel 4 wird die Generierung simulierter Ereignisse, erwarteter Observablenverteilungen und von Pseudoexperimenten beschrieben. In Kapitel 5 werden die statistischen Methoden dargelegt, welche die Grundlage der Analysen in dieser Arbeit bilden. Daraufhin wird in Kapitel 6 die Anwendung dieser Methoden zum Test der CP-Invarianz der Higgs-Bosonproduktion in Vektorbosonfusion erläutert. Der Einfluss CP-verletzender neuer Physik auf die Verteilung CP-ungerader Observablen wird in Kapitel 7 untersucht. In Kapitel 8 werden die Ergebnisse dargelegt, die mit der Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilungen von CP-ungeraden Observablen gewonnen wurden. Weiterhin enthält Kapitel 9 die Ergebnisse aus der Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilungen und Kapitel 10 die aus der Betrachtung des Mittelwertes erhaltenen Ergebnisse. In Kapitel 11 werden die wichtigsten Resultate der einzelnen Methoden zum Test der CP-Invarianz im Vergleich betrachtet. Abschließend ist in Kapitel 12 eine kurze Zusammenfassung der vorangegangenen Analysen gegeben.

2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel soll eine kurze Einführung in die dieser Arbeit zugrunde liegenden theoretischen Aspekte vermitteln und orientiert sich weitestgehend an [21, 22] (Abschnitte 2.1 bis 2.4), sowie [20] (Abschnitte 2.5 und 2.8).

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) enthält alle bekannten Elementarteilchen und beschreibt ihre Wechselwirkungen. Es umfasst drei der vier grundlegenden Wechselwirkungen der Natur: Die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung sowie die starke Wechselwirkung. Die Gravitation als vierte fundamentale Wechselwirkung ist auf derzeit experimentell beobachtbaren Energieskalen zu klein, um in der Elementarteilchenphysik eine Rolle zu spielen und wird daher im Standardmodell nicht beschrieben. Die Elementarteilchen werden bezüglich ihres Spins und ihrer Ladungen Q , \mathbf{I}_W , \mathbf{C} , jeweils bezüglich der zugehörigen Wechselwirkung¹, klassifiziert. Hierbei bezeichnet Q die elektrische Ladung, \mathbf{I}_W den schwachen Isospin und \mathbf{C} die Farbladung bezüglich der starken Wechselwirkung. Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ werden als Fermionen bezeichnet². Im Standardmodell gibt es zwei Arten von Fermionen. Zum Einen die Quarks, welche der starken, der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen und nach ihrer Ladung in zwei Gruppen von je drei Quarks unterschieden werden³: *up*-, *charm*- und *top*-Quark (u, c, t) mit Ladung $+\frac{2}{3}$, sowie *down*-, *strange*- und *bottom*-Quark (d, s, b) mit Ladung $-\frac{1}{3}$. Zum Anderen gibt es Leptonen, welche ebenfalls anhand ihrer Ladung in zwei Gruppen unterschieden werden können: das Elektron, das Myon und das Tauon (e , μ , τ) mit Ladung -1 sowie das Elektron-Neutrino, das Myon-Neutrino und das Tauon-Neutrino (ν_e , ν_μ , ν_τ) mit Ladung 0. Leptonen unterliegen der schwachen und, sofern sie Ladung besitzen, auch der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die drei Teilchengenerationen innerhalb einer solchen Gruppe von Leptonen bzw. Quarks unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Massen und ihrer Flavourquantenzahlen, abgesehen von den drei Neutrinos, die zwar unterschiedliche Flavours besitzen aber im Standardmodell als masselos angenommen werden. Für jedes Quark und Lepton existiert ein Antiteilchen mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens.

Teilchen mit ganzzahligem Spin werden als Bosonen bezeichnet. Zu den Bosonen des Standardmodells zählen die Vektorbosonen mit Spin 1, durch deren Austausch die Wechselwirkungen zwischen den anderen Elementarteilchen vermittelt werden. Das Photon (γ) vermittelt die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung wird durch den Austausch der schwachen Vektorbosonen (W^\pm und Z) vermittelt und die starke Wechselwirkung durch den Austausch von acht Gluonen (g). Jedes dieser Vektorbosonen ist in der Quantenfeldtheorie

¹ Q ist die Ladung der elektromagnetischen Wechselwirkung, I_W die der schwachen Wechselwirkung und \mathbf{C} die der starken Wechselwirkung,

²Spins sind in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums \hbar angegeben. Im SI-Einheitensystem ist $\hbar = 1.054571800(13) \cdot 10^{-34}$ Js [14].

³Die Ladungen der Elementarteilchen sind in Einheiten der Elementarladung e angegeben. Im SI-Einheitensystem ist $e = 1.6021766208(98) \cdot 10^{-19}$ C [14].

Drei Generationen
der Materie (Fermionen)

	I	II	III		
Masse →	2,3 MeV	1,275 GeV	173,07 GeV	0	125,09 GeV
Ladung →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
Spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
Name →	u up	c charm	t top	γ Photon	H Higgs Boson
Quarks	4,8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange	4,18 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom	0 0 1 g Gluon	
	<2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e Elektron- Neutrino	<0,19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ Myon- Neutrino	<18,2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ Tau- Neutrino	91,2 GeV 0 1 Z⁰ Z Boson	
Leptonen	0,511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e Elektron	105,7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ Myon	1,777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ Tau	80,4 GeV ± 1 1 W[±] W Boson	Eichbosonen

Abbildung 1: Die Quarks, Leptonen und Bosonen des Standardmodells [23]. Die angegebenen Massen sind lediglich ungefähre Angaben. Für aktuelle Messwerte siehe z.B. [14].

eine Konsequenz der Forderung einer lokalen Eichsymmetrie an die Lagrangedichte der entsprechenden Wechselwirkung. Weiterhin enthält das Standardmodell das Higgs-Boson (H) mit Spin 0. Es ergibt sich als Konsequenz der elektroschwachen Symmetriebrechung im Brout-Englert-Higgs-Mechanismus, worauf in Abschnitt 2.3 näher eingegangen wird. Abbildung 1 bietet einen Überblick über die Quarks, Leptonen und Bosonen des Standardmodells und die zugehörigen Ladungen und Spins, sowie eine grobe Angabe ihrer Massen.

2.2 Die elektroschwache Theorie

In der von S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg entwickelten elektroschwachen Theorie wurden die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung vereinheitlicht [1, 2, 3]. Sie basiert auf dem Produkt $U(1)_Y$ und $SU(2)_{I_W,L}$ zweier Symmetriegruppen. $U(1)_Y$ ist hierbei die lokale Eichsymmetriegruppe der schwachen Hyperladung (Y) und $U(2)_{I_W,L}$ die des schwachen Isospins, welche auf linkshändige Fermionen (L) wirkt. Die Forderung nach Invarianz der Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung unter der lokalen Eichsymmetrie $SU(2)_{I_W,L} \times U(1)_Y$ impliziert die Existenz von vier masselosen Eichbosonen $W^{1,2,3}$ und B . Aus einer Rotation des Systems um den schwachen Mischungswinkel Θ_W erhält man die beobachtbaren Masseneigenzustände der Eichbosonen

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{und außerdem } W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2). \quad (2)$$

A kann als Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung mit dem Photon γ identifiziert werden und die W^\pm neben dem Z -Boson als die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung.

2.3 Der Brout-Englert-Higgs-Mechanismus

Damit die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung der geforderten Eichsymmetrie genügt, darf sie keine Massenterme enthalten, was jedoch der experimentellen Beobachtung massiver Eichbosonen W^\pm , Z und Fermionen widerspricht. Eine Lösung dieses Widerspruchs ist durch den Brout-Englert-Higgs-Mechanismus gegeben, welcher von R. Brout, F. Englert, P. Higgs, G. Guralnik, C.R. Hagen und T. Kibble im Jahre 1964 vorgeschlagen wurde und die Masse der drei besagten Eichbosonen erklärt [4, 5, 6, 7, 8].

Im Brout-Englert-Higgs-Mechanismus wird ein Zusatzterm in der Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung eingeführt mit einem komplexen, skalaren Dublett mit $I_W = \frac{1}{2}$ und $Y = 1$,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} , \quad (3)$$

und dem Potential

$$V(\phi^\dagger\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi, \quad \lambda, \mu^2 > 0 . \quad (4)$$

$V(\phi^\dagger\phi)$ besitzt unendlich viele entartete Minima ϕ_{\min} mit $|\phi_{\min}| = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$, was für $\mu^2 > 0$ einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert gleichkommt. Aus den entarteten Grundzuständen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\phi_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} , \quad (5)$$

gewählt werden, mit $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$. Die ursprüngliche Symmetrie des Systems geht durch diese Wahl verloren, was als spontane Symmetriebrechung bezeichnet wird. Das Higgs-Boson entspricht Fluktuationen $H(x)$ um den Grundzustand:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Die Form des Higgspotentials und die spontane Symmetriebrechung werden in Abbildung 2 mittels einer Kugel veranschaulicht, welche sich vom symmetrischen Zustand in einen entarteten Grundzustand mit $\phi \neq 0$, der den in Gleichung 5 beschriebenen Zustand darstellen soll, bewegt. Bezieht man das in Gleichung 4 definierte Potential unter Berücksichtigung der spontanen Symmetriebrechung in die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung ein, so lässt sich zeigen, dass für die Massen des Higgs-Bosons und der Eichbosonen W^\pm und Z gilt:

$$m_H = \sqrt{2}\mu = v\sqrt{2\lambda} \quad (7)$$

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad (8)$$

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_w} , \quad (9)$$

während das Photon keine Masse besitzt. $g = \sqrt{\frac{4\pi}{hc}} \frac{e}{\sin(\theta_w)}$ bezeichnet hier die Kopplungskonstante der Eichsymmetriegruppe $U(1)_Y$. Der aktuelle Messwert für die Masse m_H des Higgs-Bosons beträgt $m_H = (125.10 \pm 0.14)\text{GeV}$ [14].

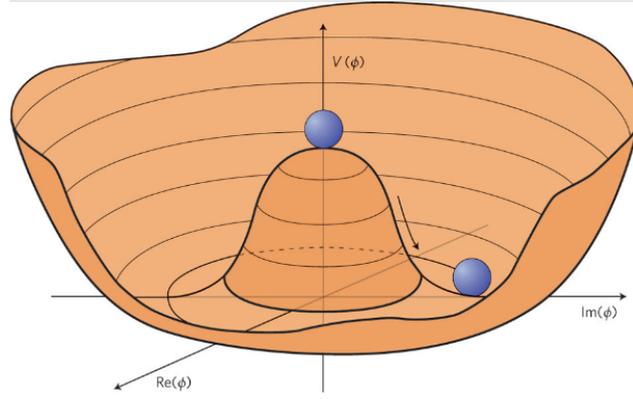


Abbildung 2: Darstellung des Higgs-Potentials $V(\phi^\dagger\phi)$ und Veranschaulichung der spontanen Symmetriebrechung durch eine Kugel, welche sich vom symmetrischen Zustand $\phi = 0$ in den entarteten Grundzustand bewegt [24].

2.4 CP-Symmetrie

Symmetrien sind Operationen, die ein physikalisches System unverändert lassen. Sie spielen eine zentrale Rolle in der Physik, da gemäß des Noether-Theorems jede Symmetrie eine Erhaltungsgröße impliziert. Der Paritätsoperator \mathcal{P} , angewandt auf eine quantenmechanische Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$\mathcal{P}\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(-\mathbf{x}) \quad (10)$$

und entspricht einer Punktspiegelung des Raumes im Ursprung. Ist $\Psi(\mathbf{x})$ ein Eigenzustand von \mathcal{P} , dann sind die zugehörigen Eigenwerte ± 1 und die zugehörige Eigenwertgleichung lautet

$$\mathcal{P}\Psi(\mathbf{x}) = \pm\Psi(\mathbf{x}) \quad . \quad (11)$$

Unter der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Parität eine Erhaltungsgröße, das heißt allen Quarks und Leptonen sowie den Eichbosonen der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung kann ein Eigenwert des Paritätsoperators zugeordnet werden. Unter der schwachen Wechselwirkung hingegen ist die Parität nicht erhalten, was beispielsweise im Jahr 1956 von C.S. Wu bei der Betrachtung des Betazerfalls von ^{60}Co -Kernen gezeigt wurde [25].

Die Operation der Ladungskonjugation \mathcal{C} , angewandt auf einen beliebigen Teilchenzustand $|\mathfrak{T}\rangle$, transformiert das Teilchen \mathfrak{T} in sein Antiteilchen $\bar{\mathfrak{T}}$,

$$\mathcal{C}|\mathfrak{T}\rangle = |\bar{\mathfrak{T}}\rangle \quad , \quad (12)$$

und besitzt ebenfalls die Eigenwerte ± 1 . Es können also nur solche Teilchen Eigenzustände von \mathcal{C} sein, die ihre eigenen Antiteilchen sind, z.B. das π^0 -Meson⁴. Ist $|\mathfrak{T}\rangle$ ein Eigenzustand von \mathcal{C} , dann lautet die zugehörige Eigenwertgleichung also:

$$\mathcal{C}|\mathfrak{T}\rangle = \pm|\mathfrak{T}\rangle \quad . \quad (13)$$

⁴Das π^0 -Meson ist die Überlagerung $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle]$ von $u\bar{u}$ und $d\bar{d}$ und besitzt bezüglich \mathcal{P} den Eigenwert +1.

Dementsprechend kann solchen Teilchen ein Eigenwert von \mathcal{C} zugeordnet werden. Wie schon bei der Parität, bleibt diese Quantenzahl unter der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten, nicht jedoch unter der schwachen Wechselwirkung.

Die CP-Operation ist das Produkt der beiden zuvor genannten Symmetrieoperationen. Ist ein Teilchen ein Eigenzustand von CP, so besitzt es ebenfalls die Eigenwerte ± 1 . Man nennt dies dann einen CP-geraden (+1) bzw. CP-ungeraden (-1) Zustand. Auch die CP-Symmetrie ist unter der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten, wie J. W. Cronin und V. L. Fitch 1964 erstmals beim Zerfall neutral geladener Kaonen nachweisen konnten [26].

Geht man davon aus, dass die Gesetze der Physik in der frühen Phase des Universums die selben waren wie heute, so erhält man die Sakharov-Bedingungen als notwendige Bedingungen zur Entstehung der Baryonenasymmetrie [15, 16, 17], also der Tatsache, dass es im beobachtbaren Bereich des Universums offenbar wesentlich mehr Materie als Antimaterie gibt. Eine Verletzung der CP-Symmetrie ist eine dieser Bedingungen. Im Standardmodell ist die einzige Quelle der CP-Verletzung die komplexe Phase der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) [27, 28]. Der experimentell beobachtete Wert für die Phase der CKM-Matrix ist jedoch zu klein, um die beobachtete Baryonenasymmetrie zu erklären [18, 19, 29]. Dies motiviert die Suche nach CP-Verletzung jenseits des Standardmodells wie in dieser Studie in der Produktion des Higgs-Bosons mittels Vektorbosonfusion. Es gilt also herauszufinden, ob das Higgs-Boson wirklich der durch das Standardmodell beschriebene CP-gerade Eigenzustand des CP-Operators ist.

2.5 Erweiterung des Standardmodells

Um über das Standardmodell hinausgehende Kopplungen des Higgs-Bosons an schwache Vektorbosonen untersuchen zu können, kann die Lagrangedichte \mathcal{L}_{SM} des Standardmodells mittels des Ansatzes einer effektiven Feldtheorie erweitert werden. Um eine Beimischung CP-ungerader Kopplungen zu berücksichtigen, wird unter der Forderung nach $SU(2)_{I_{W,L}} \times U(1)_Y$ -Symmetrie eine effektive Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} konstruiert [30]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \sum_i \frac{f_i^{(6)}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_i^{(6)} + \dots \quad (14)$$

Hierbei sind die $\mathcal{O}_i^{(6)}$ CP-ungerade Operatoren der Massendimension 6. Höhere Dimensionen werden vernachlässigt. In \mathcal{L}_{eff} werden keine CP-geraden Operatoren berücksichtigt. Λ ist die Energieskala neuer Physik, unterhalb derer man keine neuen Teilchen erwartet.

Mit diesem Ansatz reduziert sich das Matrixelement \mathcal{M} der Vektorbosonfusion⁵ auf die Summe eines CP-geraden Anteils \mathcal{M}_{SM} und eines CP-ungeraden Anteils $\mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}}$ [20],

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{SM}} + \tilde{d} \cdot \mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}} \quad , \quad (15)$$

wobei der CP-ungerade Beitrag linear von einem dimensionslosen Parameter \tilde{d} abhängt, der proportional zu den Vorfaktoren $f_i^{(6)}$ der CP-ungeraden Operatoren $\mathcal{O}_i^{(6)}$ in Gleichung 14 ist. Für das quadrierte Matrixelement ergibt sich:

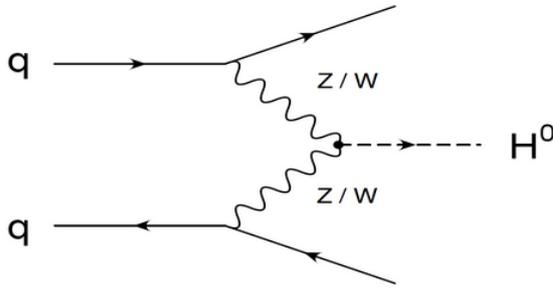
$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{SM}}|^2 + \tilde{d} \cdot 2 \text{Re}(\mathcal{M}_{\text{SM}}^* \mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}}) + \tilde{d}^2 \cdot |\mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}}|^2 \quad . \quad (16)$$

⁵Die Vektorbosonfusion wird in Abschnitt 2.6 beschrieben.

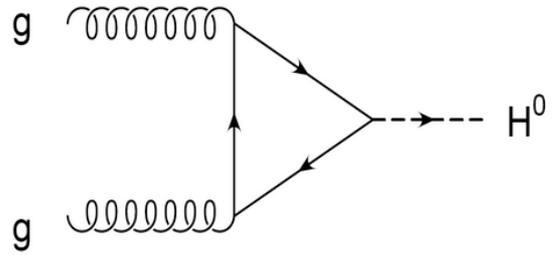
Die Terme $|\mathcal{M}_{\text{SM}}|^2$ und $\tilde{d}^2 \cdot |\mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}}|^2$ sind CP-gerade, wohingegen der Interferenzterm $\tilde{d} \cdot 2 \text{Re}(\mathcal{M}_{\text{SM}}^* \mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}})$ CP-ungerade ist. Im Standardmodell ist das Higgs-Boson CP-gerade. Die in der effektiven Feldtheorie durch $\tilde{d} \neq 0$ charakterisierte CP-ungerade Beimischung im Matrixelement $|\mathcal{M}|^2$ ließe darauf schließen, dass das Higgs-Boson nicht der im Standardmodell vorhergesagte Eigenzustand ist. Ist also $\tilde{d} \neq 0$, so impliziert dies eine Verletzung der CP-Symmetrie.

2.6 Signalprozess

Die dominanten Produktionskanäle des Higgs-Bosons bei der Kollision von Protonen am *Large Hadron Collider*⁶ sind die Gluon-Gluon-Fusion (ggF), die Vektorbosonfusion (VBF), sowie die Vektorboson- (VH) oder top-Quark- (ttH) -assoziierten Produktionskanäle [31]. Abbildung 3a zeigt das Feynman-Diagramm eines VBF-Prozesses in führender Ordnung in Quantenchromodynamik⁷, Abbildung 3b das Feynman-Diagramm eines ggF-Prozesses.



(a) Feynman-Diagramm eines VBF-Prozesses in führender Ordnung in QCD [32].



(b) Feynman-Diagramm eines ggF-Prozesses in führender Ordnung in QCD [32].

Abbildung 3: Beispiele für Feynman-Diagramme der beiden dominanten Produktionskanäle des Higgs-Bosons.

Die Vektorbosonfusion ist der Prozess $pp \rightarrow Hqq$, in dem in einer Kollision zweier Protonen zwei Quarks je ein Eichboson der elektroschwachen Wechselwirkung abstrahlen (W^\pm, Z). Diese beiden Eichbosonen fusionieren zu einem Higgs-Boson. Die beiden Quarks können aufgrund ihrer Farbladung nicht in einem ungebundenen Zustand existieren und bilden durch den Prozess der Hadronisierung einen Teilchenschauer, welcher mit dem englischen Wort *Jet* bezeichnet wird. In der Gluon-Gluon-Fusion ($pp \rightarrow H$) entsteht aus zwei Gluonen eine Quarkschleife, aus welcher ein Higgs-Boson gebildet wird. In der Vektorboson-assoziierten Produktion ($pp \rightarrow W^\pm H$ oder $pp \rightarrow ZH$) entsteht aus zwei Quarks ein elektroschwaches Vektorboson, welches ein Higgs-Boson abstrahlt. Die top-Quark-assoziierte Produktion ($pp \rightarrow \bar{t}tH$) ist die Produktion eines $\bar{t}t$ -Paares unter Aussendung eines Higgs-Bosons. Abbildung 4 zeigt die im Standardmodell erwarteten totalen Wirkungsquerschnitte der einzelnen Produktionsprozesse des Higgs-Bosons für eine Schwerpunktenenergie von $\sqrt{s} = 14\text{TeV}$ und eine Masse m_H um 135GeV . In dieser Arbeit wird die Kopplung HVV ($V = W^\pm, Z$) betrachtet um die CP-Invarianz in der Vektorbosonfusion zu testen, was anhand der beiden Jets im Endzustand mittels der in Abschnitt 2.8 definierten Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erfolgt.

⁶Eine Beschreibung des LHC und des ATLAS-Detektors findet sich in Kapitel 3.

⁷Die Quantenchromodynamik (QCD) beschreibt die starke Wechselwirkung. Für weitergehende Erläuterungen siehe z.B. [21].

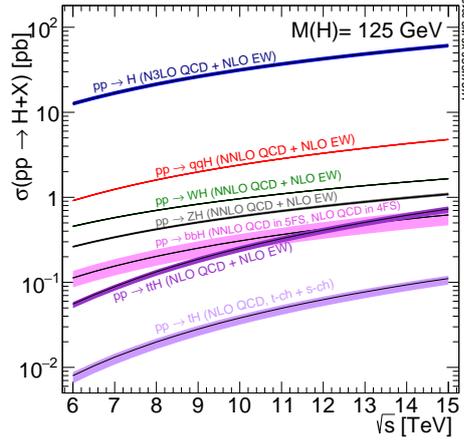


Abbildung 4: Vergleich der im Standardmodell erwarteten totalen Wirkungsquerschnittes der Produktionskanäle des Higgs-Bosons für eine Masse m_H um 125GeV und eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ [33].

2.7 Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von \tilde{d}

Der Wirkungsquerschnitt σ berechnet sich durch Integration des quadrierten Matrixelementes $|\mathcal{M}|^2$ über den Phasenraum des Endzustandes. Besitzt das Matrixelement einen CP-ungeraden Anteil wie in Gleichung 16, so enthält das Differential $d\sigma$ zusätzlich zum Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{\text{SM}}$ des Standardmodells einen weiteren CP-geraden Beitrag $d\sigma_{\text{CP-gerade}}$ sowie einen CP-ungeraden Beitrag $d\sigma_{\text{CP-ungerade}}$:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d} \cdot d\sigma_{\text{CP-ungerade}} + \tilde{d}^2 \cdot d\sigma_{\text{CP-gerade}} \quad . \quad (17)$$

Durch Integration erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt σ :

$$\sigma = \int d\sigma = \int d\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d} \int d\sigma_{\text{CP-ungerade}} + \tilde{d}^2 \int d\sigma_{\text{CP-gerade}} \quad . \quad (18)$$

Das Integral $\int d\sigma_{\text{CP-ungerade}}$ verschwindet, wenn über eine CP-symmetrische Region des Phasenraumes integriert wird. Es ergibt sich eine quadratische Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von \tilde{d} :

$$\sigma = \sigma_{\text{SM}} + \tilde{d}^2 \sigma_{\text{CP-gerade}} \quad . \quad (19)$$

Dementsprechend weist die in einem Zeitraum Δt erwartete Gesamtanzahl N an Ereignissen ebenfalls eine quadratische Abhängigkeit von \tilde{d} auf:

$$\begin{aligned} N(\tilde{d}) &= \int_{\Delta t} \frac{dN}{dt} dt \\ &= \mathcal{L}_{\text{int}} \sigma \\ &= \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d}^2 \sigma_{\text{CP-gerade}} \right) \\ &=: N_{\text{SM}} + c \tilde{d}^2 \quad , \end{aligned} \quad (20)$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{int}} = \int_{\Delta t} \mathcal{L} dt$ die integrierte Luminosität und N_{SM} die im Standardmodell erwartete Ereignisanzahl bezeichnen. Die instantane Luminosität \mathcal{L} ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Ereignisanzahl $\frac{dN}{dt}$ und dem Wirkungsquerschnitt σ :

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L}\sigma \quad . \quad (21)$$

Die instantane Luminosität hängt im Allgemeinen vom experimentellen Aufbau ab. Des Weiteren wurde die Konstante c definiert als

$$c := \mathcal{L}_{\text{int}} \sigma_{\text{CP-gerade}} \quad . \quad (22)$$

2.8 CP-sensitive Observablen

Die Form der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen ändert sich mit der Stärke \tilde{d} der CP-ungeraden Beimischung im quadrierten Matrixelement $|\mathcal{M}|^2$ (Gleichung 16) und erlaubt damit einen Test auf CP-Invarianz (siehe Abschnitt 6). In diesem Abschnitt werden die beiden CP-ungeraden Observablen $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ und \mathcal{OO} erläutert, welche in dieser Arbeit betrachtet werden.

2.8.1 Der vorzeichenbehaftete Azimuthalwinkel $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Der vorzeichenbehaftete Azimuthalwinkel $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ist definiert durch

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} b_+^\mu p_+^\nu b_-^\rho p_-^\sigma = 2p_{T,+} p_{T,-} \sin(\Phi_+, -\Phi_-) = 2p_{T,+} p_{T,-} \sin(\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}) \quad . \quad (23)$$

Hierbei bezeichnen die Indices $+/-$ die positive bzw. negative Detektorhemisphäre. Weiterhin bezeichnen die $b_{+/-}^i$ die Viererimpulse der Protonenstrahlen, $p_{+/-}$ die Viererimpulse der beiden führenden Jets⁸ und $\Phi_{+/-}$ die Azimuthalwinkel der beiden Jets. Die Vorzeichenbehaftung erhält $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ aus der Korrelation der führenden Jets mit der Richtung der Protonenstrahlen, indem stets der Azimuthalwinkel Φ_- des Jets in der negativen Hemisphäre vom Azimuthalwinkel Φ_+ des Jets in der positiven Hemisphäre subtrahiert wird, wofür in der Ereignisselektion zwei Jets aus verschiedenen Hemisphären gefordert werden müssen [30].

2.8.2 Die optimale Observable \mathcal{OO}

Eine weitere CP-ungerade Observable ist die optimale Observable \mathcal{OO} , welche als der Quotient aus dem Interferenzterm $2 \text{Re}(\mathcal{M}_{\text{SM}}^* \mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}})$ und dem Beitrag $|\mathcal{M}_{\text{SM}}|^2$ des Standardmodells im quadrierten Matrixelement (Gleichung 16) definiert ist:

$$\mathcal{OO} = \frac{2 \text{Re}(\mathcal{M}_{\text{SM}}^* \mathcal{M}_{\text{CP-ungerade}})}{|\mathcal{M}_{\text{SM}}|^2} \quad . \quad (24)$$

Diese skalare Größe ist insofern „optimal“, dass sie die Information aus dem gesamten Phasenraum des Endzustandes, bestehend aus dem Higgs-Boson und den beiden führenden Jets, enthält [34, 35, 36]. Die zur Berechnung von \mathcal{OO} nötigen Matrixelemente werden mit HAWK [37, 38, 39]

⁸Als führende Jets werden diejenigen mit den größten Transversalimpulsen p_T bezeichnet.

berechnet. Hierfür wird neben den Vierervektoren und Farbladungen der beiden führenden Jets und des Higgs-Bosons die Größe

$$x_{1,2} = \frac{m_{H_{jj}}}{\sqrt{s}} e^{\pm y_{H_{jj}}} \quad , \quad (25)$$

benötigt. $x_{1,2}$ sind die Anteile der Impulse der beiden einfallenden Partonen an den Impulsen der jeweiligen Protonen. x_1 bezieht sich dabei auf das sich in positive z -Richtung bewegende Proton und x_2 auf das sich in negative z -Richtung bewegende Proton. $m_{H_{jj}}$ bezeichnet die invariante Masse des Systems aus den beiden Jets und dem Higgs-Boson im Endzustand und $y_{H_{jj}}$ die Rapidität des Systems. $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ ist die Schwerpunktsenergie des Gesamtsystems der einfallenden Protonen. In dieser Studie wurden für die Berechnungen der Matrixelemente alle Vierervektoren und Farbladungen auf Partonniveau als bekannt vorausgesetzt.

3 Experiment

3.1 Der Large Hadron Collider

Der *Large Hadron Collider* (LHC) [11] ist ein ringförmiger Teilchenbeschleuniger und befindet sich in Genf. Er erreicht die derzeit für Teilchenbeschleuniger weltweit größten Energieskalen von mehreren TeV. Der LHC wird vom CERN¹ betrieben. In *Run-2* (2015-2018) wurde der LHC bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ betrieben. Die integrierte Luminosität der in den einzelnen Jahren aufgezeichneten Datensätze sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Jahr	\mathcal{L}_{int} [fb ⁻¹]
2015/2016	36.2 ± 0.8
2017	44.3 ± 1.0
2018	58.5 ± 1.2
Kombiniert	139.0 ± 2.4

Tabelle 1: Integrierte Luminositäten \mathcal{L}_{int} während *Run-2* des LHC [40].

Die erwartete Anzahl an VBF-Ereignissen eines bestimmten Zerfallskanals kann mit Gleichung 20 berechnet werden. Hierfür benötigt man außer der integrierten Luminosität den Wirkungsquerschnitt σ_{VBF} der Vektorbosonfusion, das Verzweungsverhältnis des betrachteten Zerfallskanals und eine Abschätzung der Effizienzen von Ereignisselektion und Ereignisrekonstruktion. Für $m_H = 125\text{GeV}$ und $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ wird in [41] ein am LHC im Standardmodell erwarteter Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{\text{VBF}} = 3781.7(1)\text{fb}$, sowie ein erwartetes Verzweungsverhältnis für den Zerfall $H \rightarrow \tau^+\tau^-$ von $6.272 \cdot 10^{-2}$ angegeben. Anhand der in den Jahren 2015 und 2016 nach Ereignisselektion erhaltenen Ereignisanzahl für die Produktion eines Higgs-Bosons durch VBF mit anschließendem Zerfall in zwei τ -Leptonen wurde durch Extrapolation zur kombinierten integrierten Luminosität von *Run-2* eine Anzahl von etwa $N_{\text{SM}} \approx 200$ Ereignissen unter der Standardmodellhypothese abgeschätzt. Diese Anzahl liegt der in dieser Arbeit durchgeführten Analyse als Annahme zugrunde.

3.2 Der ATLAS-Detektor

Der ATLAS-Detektor ist ein zylindrischer Detektor am LHC und wurde konstruiert, um die Vorhersagen des Standardmodells durch präzise Messungen zu überprüfen. Eine schematische Darstellung des Aufbaus des Detektors ist in Abbildung 5 dargestellt. Der ATLAS-Detektor besitzt eine zylindrische Form um die Strahlachse. Die Geometrie des LHC definiert das Koordinatensystem des ATLAS-Detektors mit dem Ursprung an dem Punkt, an dem sich in entgegengesetzten Teilchenstrahlen bewegenden Protonen zur Kollision gebracht werden. Die z -Achse verläuft entlang der Teilchenstrahlen, die x -Achse zeigt in Richtung des Mittelpunktes des LHC und die y -Achse zeigt nach oben. Führt man Kugelkoordinaten ein, wobei der Polarwinkel

¹Europäische Organisation für Kernforschung

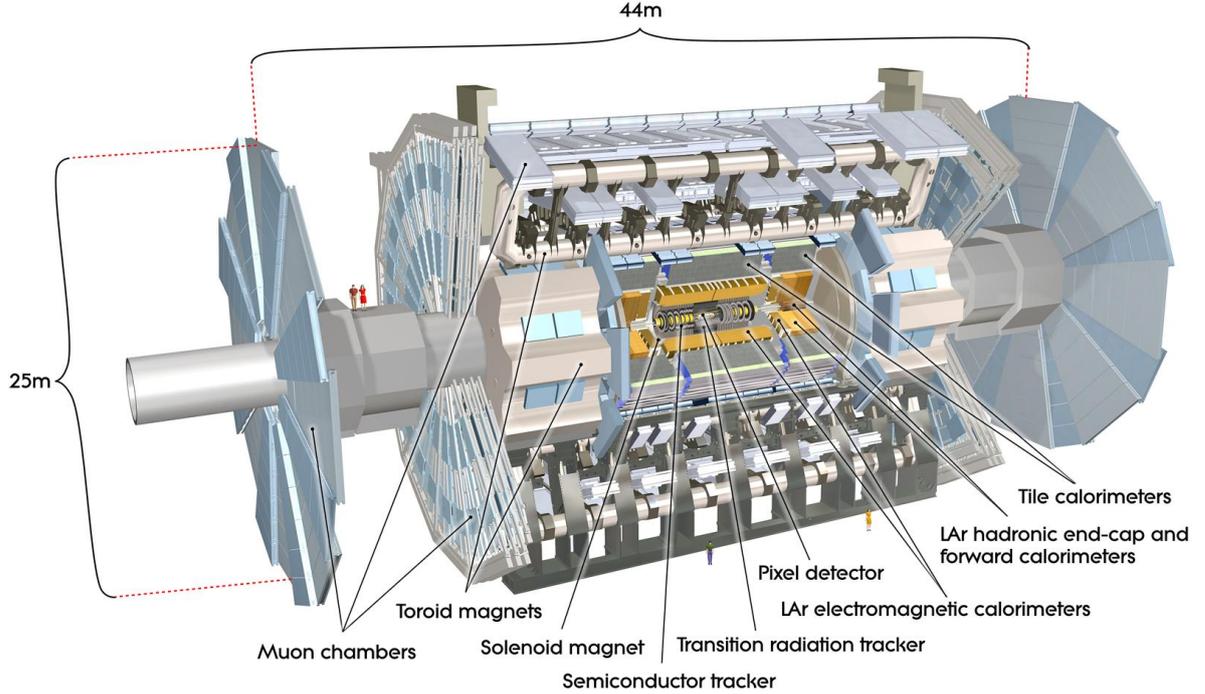


Abbildung 5: Schematische Darstellung des ATLAS-Detektors [42].

θ relativ zur z -Achse und der Azimuthalwinkel Φ relativ zur x -Achse definiert sind, so erlaubt dies für ein Teilchen die Definition eines Vierervektors im Koordinatensystem

$$(E, p_T, \eta, \Phi) \quad , \quad (26)$$

wobei E die Energie des Teilchens, p_T den Transversalimpuls relativ zur z -Achse und $\eta := -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$ die Pseudorapidität bezeichnet. Alternativ zu η kann die Rapidität $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+p_L}{E-p_L} \right)$ definiert werden, wobei p_L der Longitudinalimpuls relativ zur z -Achse ist.

Der ATLAS-Detektor besteht aus einem inneren Detektor, einem *Sampling*-Kalorimetersystem und einem Myonenspektrometer [20]. Der innere Detektor ist ein Spurdetektor und erlaubt die Rekonstruktion von Teilchenspuren durch Messung von Ort und Impuls geladener Teilchen. Eine dünne, supraleitende Solenoidspule um den Spurdetektor durchsetzt ihn mit einem Magnetfeld von 2T. Eine präzise Rekonstruktion von Jets ist im inneren Detektor für Pseudorapiditäten $|\eta| < 2.5$ möglich. Das Kalorimetersystem besteht aus elektromagnetischen *Sampling*-Kalorimetern, die Pseudorapiditäten $|\eta| < 3.2$ abdecken und einem hadronischen Kalorimeter für Pseudorapiditäten im Bereich von $|\eta| < 1.7$. Mit dem Kalorimetersystem werden die Energien einfallender Teilchen gemessen. An den Endkappen des Detektors sind weitere Kalorimeter angebracht. Diese ermöglichen eine Energiemessung für Pseudorapiditäten bis zu $|\eta| = 4.9$. Das Kalorimetersystem ist vom Myonenspektrometer umgeben, welches aus drei supraleitenden Toroidmagneten und einem System von Spurkammern besteht und einen Nachweis von Myonen für Pseudorapiditäten bis zu $|\eta| = 2.5$ ermöglicht.

In dieser Studie werden für die aus einer Monte-Carlo-Simulation generierten Ereignisse auf Partonniveau betrachtet. Es werden also weder Detektoreffekte, noch die Bildung von Teilchenschauern durch Hadronisierung berücksichtigt. Die Einschränkung des räumlichen Bereiches, in dem mit dem ATLAS-Detektor präzise Messungen möglich sind, motiviert die Einschränkung

der für die in dieser Analyse verwendeten Ereignisse auf einen Bereich von Pseudorapiditäten $|\eta_{1,2}| < 4.5$ der beiden führenden Jets j_1 und j_2 . Außerdem werden mindestens zwei Jets mit einem Transversalimpuls von jeweils $p_T > 25\text{GeV}$ gefordert. In ATLAS-Analysen ist für einen Transversalimpuls in diesem Bereich eine präzise Messung und Rekonstruktion der Jets möglich. Der Phasenraum der Vektorbosonfusion zeichnet sich gegenüber den anderen Produktionskanälen durch eine große invariante Masse m_{jj} der beiden führenden Jets sowie durch eine große Differenz $\Delta\eta$ ihrer Pseudorapiditäten aus. Zur Untersuchung des VBF-Produktionskanals werden in der hier durchgeführten Analyse ähnliche Phasenraumschnitte wie in [30] angewandt, und zwar

$$m_{jj} > 500\text{GeV}, \quad |\Delta\eta| > 4 \quad . \quad (27)$$

Die Wahl eines symmetrischen Intervalls für $|\Delta\eta|$ definiert eine CP-symmetrische Phasenraumregion. Für die Berechnung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ werden per Definition (Gleichung 23) zusätzlich verschiedene Detektorhemisphären der beiden führenden Jets gefordert, also

$$\eta_{j_1}\eta_{j_2} < 0 \quad . \quad (28)$$

4 Ereignisgeneration

In den Abschnitten 4.1 bis 4.4 wird die Generierung der für die in den Kapiteln 7, 8 und 9 durchgeführte Analyse benötigten simulierten Ereignisse besprochen. Es wird dabei in Abschnitt 4.1 zunächst die Generierung von Ereignissen und erwarteten Observablenverteilungen gemäß der Standardmodellvorhersage erläutert. Weiterhin wird in Abschnitt 4.2 die Generierung von Pseudoexperimenten besprochen, die in den Kapiteln 8 und 9 die Untersuchung der Verteilung von Maximum-Likelihood-Schätzern ermöglichen wird¹. In Abschnitt 4.3 wird die Generierung eines gleichverteilten Untergrundes in den untersuchten Observablenverteilungen erläutert und in Abschnitt 4.4 schließlich das Interpolationsverfahren, mit dem eine Theorievorhersage für beliebige, reellwertige \tilde{d} möglich ist, was für die Bestimmung von \tilde{d} durch Modellanpassung an eine beobachtete Verteilung erforderlich ist².

4.1 Erwartete Verteilung

Die in dieser Arbeit untersuchten Ereignisse wurden gemäß der Vorhersagen des Standardmodells mit dem Monte-Carlo-Generator POWHEG-Box v2 generiert [43, 44, 45]. Nach Anwendung der in Abschnitt 2.6 besprochenen Phasenraumschnitte liegt ein Datensatz von 341731 Ereignissen für die Analyse der optimalen Observablen \mathcal{OO} und ein Datensatz von 340956 Ereignissen für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ vor. Diese werden auf die nach der Ereignis Selektion erwartete Ereignisanzahl von $N_{SM} = 200$ im Standardmodell normiert. Die erwarteten Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ für hypothetische Werte $\tilde{d} \neq 0$ werden durch Umgewichtung der generierten Ereignisse berechnet. Die zur Umgewichtung nötigen Matrixelemente werden mit HAWK [37, 38, 39] berechnet. Die Gewichte $w(\tilde{d})$ berechnen sich aus

$$w(\tilde{d}) = \frac{|\mathcal{M}(\tilde{d})|^2}{|\mathcal{M}_{SM}|^2} \quad . \quad (29)$$

Die Gewichte $w(\tilde{d})$ hängen von den Vierervektoren und Flavourquantenzahlen der Partonen im Anfangs- und Endzustand sowie vom Vierervektor des Higgs-Bosons ab. Sie lassen sich mit Gleichung 16 in der Form

$$w(\tilde{d}) = 1 + w_1\tilde{d} + w_2\tilde{d}^2 \quad . \quad (30)$$

schreiben. Stellt man die Verteilung einer CP-ungeraden Observablen mit den durch $w(\tilde{d})$ umgewichteten Ereignissen in einem Histogramm dar, so erwartet man für die Ereignisanzahl

¹Zur Maximum-Likelihood-Methode und weiteren in dieser Arbeit angewandten statistischen Methoden siehe Kapitel 5.

²Zur Bestimmung von \tilde{d} durch Modellanpassung und weiteren Methoden zum Test der CP-Invarianz siehe Kapitel 6.

λ_i in einem Bin eine \tilde{d} -Abhängigkeit der Form

$$\lambda_i(\tilde{d}) = \lambda_{i,\text{SM}} \left(1 + c_{1,i}\tilde{d} + c_{2,i}\tilde{d}^2 \right) \quad , \quad (31)$$

wobei $\lambda_i(\tilde{d})$ die erwartete Anzahl der Ereignisse in Bin i bezeichnet, und $\lambda_{i,\text{SM}}$ die erwartete Anzahl der Ereignisse unter der Standardmodellhypothese $\tilde{d} = 0$. Die Konstanten $c_{1,i}$ und $c_{2,i}$ hängen von der Wahl der Bins ab.

4.2 Pseudoexperimente

Zur Schätzung von Modellparametern mit der Monte-Carlo-Methode (siehe Kapitel 5) wird eine große Anzahl an Pseudoexperimenten benötigt. Die Ereignisse jedes Pseudoexperimentes werden zu jeder \tilde{d} -Hypothese jeweils aus den durch Umgewichtung der aus den Standardmodelldaten gewonnenen Ereignissen zufällig ausgewählt. Die Gesamtzahl N der Ereignisse in jedem Pseudoexperiment ist um den durch Gleichung 20 gegebenen Erwartungswert $N(\tilde{d}) = N_{\text{SM}} + c\tilde{d}^2$ poissonverteilt. Unter der Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0$ können mit den selektierten Ereignissen aus der Monte-Carlo-Generation bis zu $\frac{341731}{N_{\text{SM}}} \approx 1708$ Pseudoexperimente für die Analyse der \mathcal{OO} -Verteilung und $\frac{340956}{N_{\text{SM}}} \approx 1704$ Pseudoexperimente für die Analyse der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung generiert werden. Für die Analysen in den Kapiteln 8, 9 und 10 wurden je 1700 Pseudoexperimente generiert.

4.3 Untergrund

In den Kapiteln 8 und 9 wird unter anderem der Einfluss eines gleichverteilten Untergrundes in den Observablenverteilungen auf die Sensitivität von CP-Tests untersucht. Zu der aus einem Pseudoexperiment erhaltenen Observablenverteilung wird ein Untergrund angesetzt, dessen erwartete Gesamtereignisanzahl N_b entsprechend eines hypothetischen Untergrund/Signalverhältnisses,

$$r_b = \frac{N_b}{N_{\text{SM}}} \quad , \quad (32)$$

der Gesamtzahl N_{SM} der in einem Pseudoexperiment unter der Standardmodellhypothese beobachteten Signalereignisse folgt. Liegt nun in einem Pseudoexperiment das Histogramm einer Observablenverteilung mit n_{Bins} Bins vor, so wird der zu dieser Verteilung addierte Untergrund in jedem einzelnen Bin aus einer Poissonverteilung mit dem Erwartungswert

$$b = \frac{r_b N_{\text{SM}}}{n_{\text{Bins}}} \quad , \quad (33)$$

generiert. Nach Summation des so für einen Bin generierten Untergrundes mit dem entsprechenden Bin der Verteilung liegt nun also ein Pseudoexperiment mit im Mittel gleichverteiltem Untergrund vor.

4.4 Theorievorhersage für beliebige \tilde{d} mittels Interpolation

Die Maximum-Likelihood-Methode zur Parameterschätzung, welche in Kapitel 5 eingeführt wird, hat zum Ziel, ein von kontinuierlichen Parametern abhängiges Modell an die in einem

Pseudoexperiment beobachteten Daten anzupassen. Hierfür muss die Theorievorhersage für ein beliebiges, reellwertiges $\tilde{d} \in [-1, 1]$ bestimmbar sein. Um dies zu erreichen wird zunächst zu einer Menge von diskreten Werten \tilde{d}_j jeweils die erwartete Verteilung wie in Abschnitt 4.1 besprochen generiert. Hierbei wird die Anzahl n_{Bins} der verwendeten Bins stets gleich gewählt. Zwischen den so erhaltenen Histogrammen wird zu beliebigen \tilde{d} Werten zwischen „benachbarten“ \tilde{d}_j linear interpoliert. Die Interpolation erfolgt „Bin für Bin“, das heißt für eine erwartete Ereignisanzahl $\lambda_i(\tilde{d}_1)$ in Bin i unter einer Hypothese \tilde{d}_1 und einer erwarteten Anzahl $\lambda_i(\tilde{d}_2)$ im gleichen Bin unter einer Hypothese $\tilde{d}_2 > \tilde{d}_1$ wird die Erwartung $\lambda_i(\tilde{d})$ für ein beliebiges \tilde{d} mit $\tilde{d}_1 < \tilde{d} < \tilde{d}_2$ mit der Interpolationsformel von Newton berechnet [46],

$$\lambda_i(\tilde{d}) = \lambda_i(\tilde{d}_1) \frac{\tilde{d}_2 - \tilde{d}}{\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1} + \lambda_i(\tilde{d}_2) \frac{\tilde{d} - \tilde{d}_1}{\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1} . \quad (34)$$

Zur Maximum-Likelihood-Anpassung in den Kapiteln 8 und 9 wurden die Werte \tilde{d}_j stets im Abstand 0.02 voneinander gewählt:

$$\tilde{d}_j \in \{-1.00, -0.98, \dots, +0.98, +1.0\} . \quad (35)$$

5 Statistische Methoden

In diesem Kapitel wird in Abschnitt 5.1 die Maximum-Likelihood-Methode eingeführt und die Methoden dargelegt, mit denen auf Grundlage der in Abschnitt 4 beschriebenen Pseudodaten Schätzer \hat{d} für den Parameter \tilde{d} und zugehörige Konfidenzintervalle $[a, b]$ bestimmt werden sollen (Abschnitt 5.2.1). Zunächst wird dabei auf die erstmals 1937 von J.Neyman beschriebene Konstruktion von Konfidenzintervallen aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(\hat{\Theta}; \Theta)$ (siehe [47]) eingegangen und daraufhin auf die approximative Bestimmung von Konfidenzintervallen mittels einer Profillikelihoodfunktion (Abschnitt 5.3). Weiterhin werden die für diese Arbeit relevanten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen definiert und geeignete Likelihoodfunktionen zur Schätzung des Parameters \tilde{d} , der den CP-ungeraden Beitrag im Matrixelement der Vektorbosonfusion (Gleichung 15) bestimmt, konstruiert (Abschnitte 5.4 und 5.5). Auf die Anwendung der in den Abschnitten 5.2.1 bis 5.5 dargelegten Methoden zum Test der CP-Invarianz anhand einer CP-ungeraden Observablen O wird in Abschnitt 6 eingegangen. Inhalt und Notation dieses Kapitels orientieren sich größtenteils an [48].

5.1 Maximum-Likelihood-Methode

Sei x eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) $f(x; \Theta)$ bekannt ist, die Werte der m Parameter $\Theta := (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ jedoch aus einer Stichprobe $\mathbf{x}_n := (x_1, \dots, x_n)$ vom Umfang n zu schätzen sind. Ein Verfahren zur Bestimmung von Schätzern $\hat{\Theta} := (\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m)$ ist die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode). Sie bietet den Vorteil, dass Maximum-Likelihood-Schätzer meist konsistent sowie im Grenzfalle einer Stichprobe von unendlichem Umfang effizient, erwartungstreu und normalverteilt sind. Sie basiert auf der Uminterpretation von $f(x; \Theta)$ dahingehend, dass die Stichprobe \mathbf{x}_n als feste Größe behandelt und die Likelihoodfunktion,

$$L(\Theta) := f(\mathbf{x}_n | \Theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta) \quad , \quad (36)$$

als Funktion von Θ definiert wird. Die ML-Schätzer $\hat{\Theta}_i$ sind nun diejenigen Werte Θ_i , für die die Likelihoodfunktion maximal wird, also die Lösung der Gleichung

$$\left. \frac{\partial L(\Theta)}{\partial \Theta_i} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad , \quad (37)$$

wobei die Hesse-Matrix,

$$\left(\frac{\partial^2 L(\Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \quad , \quad (38)$$

ausgewertet an der Stelle $\hat{\Theta}$, als notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Maximums negativ definit sein muss.

Da die natürliche Logarithmusfunktion \ln streng monoton wachsend ist, ist die Maximierung von $L(\hat{\Theta})$ äquivalent zur Maximierung von $\ln(L(\hat{\Theta}))$ und damit zur Minimierung des negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion (NLL). Zur Minimierung des NLL wurde in dieser Arbeit stets die Implementation des *Sequential Least Squares Programming* Algorithmus in `scipy.optimize.minimize` verwendet [49].

5.2 Konfidenzgürtel und Konfidenzintervalle

5.2.1 Konstruktion exakter Konfidenzintervalle

Ein Schätzer $\hat{\Theta}(x_1, \dots, x_n)$ für einen Parameter Θ aus einer Stichprobe $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ für eine Zufallsvariable x ist ebenfalls eine Zufallsvariable mit WDF $g(\hat{\Theta}; \Theta)$. Diese WDF ist zwar oft nicht analytisch bekannt, lässt sich aber mittels einer Monte-Carlo-Simulation approximativ bestimmen. Aus $g(\hat{\Theta}; \Theta)$ kann zu einer festgelegten Wahrscheinlichkeit α ein Wert u_α bestimmt werden, sodass die Beobachtung von $\hat{\Theta} \geq u_\alpha$ mit einer Wahrscheinlichkeit α zu erwarten ist. Analog kann man ein v_β bestimmen, sodass die Beobachtung von $\hat{\Theta} \leq v_\beta$ mit einer Wahrscheinlichkeit β erwartet wird. u_α und v_β hängen also über $g(\hat{\Theta}; \Theta)$ vom wahren Wert Θ ab und lassen sich aus den α - bzw. β -Quantilen von g bestimmen:

$$\alpha = P\left(\hat{\theta} \geq u_\alpha(\theta)\right) = \int_{u_\alpha(\theta)}^{\infty} g(\hat{\theta}; \theta) d\hat{\theta} = 1 - G(u_\alpha(\theta); \theta) \quad , \quad (39)$$

$$\beta = P\left(\hat{\theta} \leq v_\beta(\theta)\right) = \int_{-\infty}^{v_\beta(\theta)} g(\hat{\theta}; \theta) d\hat{\theta} = G(v_\beta(\theta); \theta) \quad , \quad (40)$$

wobei $G(x; \Theta) = \int_{-\infty}^x g(\hat{\Theta}; \Theta) d\hat{\Theta}$ die Kumulativverteilung von $g(\hat{\Theta}; \Theta)$ bezeichnet. Abbildung 6 veranschaulicht die durch die Gleichungen 39 und 40 gegebene Abhängigkeit der Werte $u_\alpha(\Theta)$ und $v_\beta(\Theta)$ von $g(\hat{\Theta}; \Theta)$, α und β .

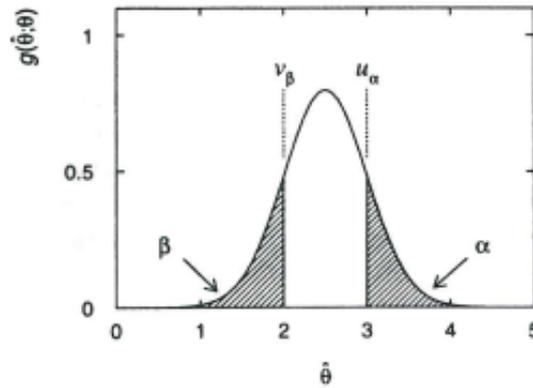


Abbildung 6: Veranschaulichung der durch die Gleichungen 39 und 40 gegebene Abhängigkeit der Werte $u_\alpha(\Theta)$ und $v_\beta(\Theta)$ von $g(\hat{\Theta}; \Theta)$, α und β [48].

Aus der Abhängigkeit der Werte u_α und v_β ergibt sich der Konfidenzgürtel, welcher die Region zwischen $u_\alpha(\Theta)$ und $v_\beta(\Theta)$ bezeichnet, oder, ausgedrückt durch eine Wahrscheinlichkeitsaussage:

$$P\left(v_\beta(\Theta) \leq \hat{\Theta} \leq u_\alpha(\Theta)\right) = 1 - \alpha - \beta \quad , \quad (41)$$

für einen durch eine Stichprobe bestimmten Schätzer $\hat{\theta}$. Der Konfidenzgürtel als Region zwischen $u_\alpha(\Theta)$ und $v_\beta(\Theta)$ ist in Abbildung 7 beispielhaft dargestellt.

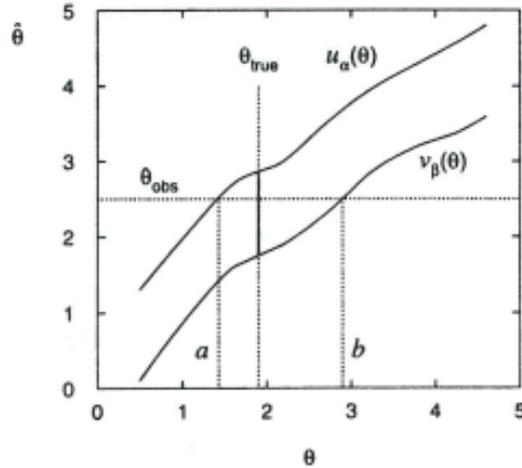


Abbildung 7: Beispielhafte Darstellung des Konfidenzgürtels [48].

Existieren Umkehrfunktionen $a(\hat{\Theta}) := u_\alpha^{-1}(\hat{\Theta})$ und $b(\hat{\Theta}) := v_\beta^{-1}(\hat{\Theta})$, so definieren sie für einen Schätzer $\hat{\Theta}$ ein Konfidenzintervall $[a, b]$ zu vorher festgelegten Wahrscheinlichkeiten α und β , sodass gilt:

$$P\left(a(\hat{\Theta}) \leq \Theta \leq b(\hat{\Theta})\right) = 1 - \alpha - \beta \quad . \quad (42)$$

Dies bedeutet, dass bei einer Vielzahl von Wiederholungen eines Experimentes ein Anteil $1 - \alpha - \beta$ der jeweils konstruierten zentralen Konfidenzintervalle den wahren Wert Θ enthalten würden. Anders ausgedrückt definiert $1 - \alpha - \beta$ also eine erwartete Abdeckwahrscheinlichkeit des wahren Wertes durch $[a, b]$, welche als Konfidenzniveau bezeichnet wird. Zur eindeutigen Definition eines Konfidenzintervalles durch ein vorher festgelegtes Konfidenzniveau wird meist $\alpha = \beta =: \frac{\gamma}{2}$ gewählt. Das so definierte Konfidenzintervall wird als zentrales Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \gamma$ bezeichnet.

5.3 Konstruktion mittels Profillikelihood

Bei der Methode der Profillikelihood wird die Likelihoodfunktion verwendet, um das zentrale Konfidenzintervall für einen Parameter Θ_1 zum Konfidenzniveau $1 - \gamma$ zu konstruieren. Hängt die Likelihoodfunktion allgemein von $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ ab, wobei lediglich ein Konfidenzintervall für Θ_1 bestimmt werden soll, so kann die Profillikelihoodfunktion L_P definiert werden:

$$L_P(\Theta_1) := L(\Theta_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_m), \quad (43)$$

wobei die $\hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_m$ die Likelihoodfunktion L für ein gegebenes Θ_1 maximieren. Aus der Maximierung von L_P erhält man wiederum das selbe Ergebnis für $\hat{\Theta}_1$ wie in Gleichung 37. Aus $L_P(\Theta_1)$ kann das zentrale Konfidenzintervall $[a, b] =: [\hat{\Theta}_1 - \sigma_-, \hat{\Theta}_1 + \sigma_+]$ approximativ aus der Relation

$$\ln L_P\left(\Theta_{-\sigma_-}^{+\sigma_+}\right) = \ln L_{\max} - \frac{\xi^2}{2} \quad (44)$$

konstruiert werden, wobei $L_{\max} := L_P(\hat{\Theta}_1)$ das Maximum der Profillikelihoodfunktion bezeichnet und $\xi := \Phi^{-1}(1 - \frac{\gamma}{2})$ das $1 - \frac{\gamma}{2}$ -Quantil der Standardnormalverteilung¹ [50]. Zu $1 - \frac{\gamma}{2} \approx 68.3\%$ erhält man $\xi = 1$ und für $1 - \frac{\gamma}{2} \approx 95.4\%$ den Wert $\xi = 2$. Die approximative Bestimmung von Konfidenzintervallen mit Gleichung 44 basiert aus der Umkehrung des Likelihood-Quotienten-Tests (siehe z.B. [51]) und der Anwendung des Satzes von Wilks [52].

5.4 Poisson-Likelihoodfunktion

Die Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung,

$$f_{\text{Poisson}}(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad (45)$$

beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer diskreten Anzahl k voneinander unabhängiger Ereignisse in Abhängigkeit eines Parameters λ , der sowohl gleich dem Erwartungswert als auch der Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Sie ist in der Physik insbesondere relevant, um die Anzahl von Ereignissen zu beschreiben, deren Auftreten räumlich oder zeitlich konstant ist. Wird beispielsweise ein Streuexperiment zwischen zwei Teilchen sehr oft wiederholt, so ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen des Endzustandes in einem azimuthalen Winkelbereich $d\Phi$ während eines Zeitintervalles dt zu detektieren, zeitlich konstant und der Erwartungswert der in $d\Phi$ detektierten Ereignisanzahl ergibt sich aus dem Produkt dieser Wahrscheinlichkeit mit dem gesamten Zeitintervall der Messung.

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ nähert sich die Poisson-WDF einer Normalverteilung,

$$f_G(k; \mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (46)$$

Diese Approximation wird üblicherweise ab $\lambda \approx 30$ verwendet.

Im hier angewandten Verfahren liegt eine Stichprobe aus n_{Bins} Bins vor, welche voneinander statistisch unabhängige, poissonverteilte Ereignisanzahlen $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_{n_{\text{Bins}}})$ enthalten. Die Parameter λ_i der jeweiligen Bins werden, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, aus der Theorievorhersage erzeugt und sind nur von \tilde{d} abhängig. Bildet man den negativen Logarithmus der in Gleichung 36 definierten Likelihood-Funktion für die Poissonverteilung, so erhält man:

$$-\ln(L_{\text{Poisson}}(\tilde{d})) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \left[k_i \ln(\lambda_i(\tilde{d})) - \lambda_i(\tilde{d}) \right] \quad , \quad (47)$$

wobei der von den λ_i unabhängige Ausdruck $\ln k!$ vernachlässigt wurde, da er sich weder auf die Lage des Minimums noch auf Differenzen zwischen den Likelihoodwerten zu verschiedenen Parameterwerten auswirkt. Damit kann die NLL im weiteren Verlauf der Berechnungen als kontinuierliche Funktion in k behandelt werden, was prinzipiell auch für f_{Poisson} durch die Ersetzung von $k!$ durch die Gammafunktion, $\Gamma(k+1)$, möglich ist². Die kontinuierliche Behandlung der Likelihoodfunktion ist nötig, um ein von kontinuierlichen Parametern abhängiges Modell an ein Histogramm mit diskreten Einträgen anpassen zu können. Die Details dieser Methode werden in den Abschnitten 6.1 und 6.2 diskutiert. Für den Untergrund wird ein weiterer, für alle Bins konstanter Mittelwert b angenommen. Aufgrund der Additivität der Poissonverteilung

¹ $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx'$, wobei $\varphi(x)$ die Standardnormalverteilung ist.

²Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist definiert durch $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ für $\text{Re}(z) > 0$ [53]

ergibt sich dann durch die Ersetzung $\lambda_i(\tilde{d}) \rightarrow \lambda_i(\tilde{d}) + b$:

$$-\ln(L_{\text{Poisson}}(\tilde{d}, b)) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \left[k_i \ln \left(\lambda_i(\tilde{d}) + b \right) - \lambda_i(\tilde{d}) - b \right] \quad , \quad (48)$$

wobei zur Konstruktion von Konfidenzintervallen für \tilde{d} die in Abschnitt 5.3 eingeführte Profillikelihoodfunktion $L_{\text{P}}(\tilde{d})$ verwendet wird.

5.5 Skellam-Likelihoodfunktion

Die Differenz $\Delta k = k_1 - k_2$ zweier statistisch unabhängiger, poissonverteilter Zufallsvariablen mit Poisson-Parameter λ_1 bzw. λ_2 folgt einer Skellam-Wahrscheinlichkeitsverteilung [54],

$$f_{\text{Skellam}}(\Delta k; \lambda_1, \lambda_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\Delta k/2} I_{|\Delta k|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \quad , \quad (49)$$

wobei

$$I_{\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m + \nu} \quad , \quad (50)$$

die modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung ν ist [53]. Die Skellam-Verteilung besitzt den Erwartungswert $\lambda_1 - \lambda_2$ und die Varianz $\lambda_1 + \lambda_2$.

Obwohl die Skellam-Verteilung als Differenz zweier Poisson-Variablen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zuvallsvariable beschreibt, kann sie kontinuierlich behandelt werden, da die Besselfunktion auch in diesem Fall definiert ist und die Norm $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{Skellam}}(\Delta k; \lambda_1, \lambda_2) d(\Delta k) = 1$ erhält. Die Fortsetzung der WDF auf eine kontinuierliche, positiv reellwertige Zufallsvariable Δk ist in Abbildung 8 beispielhaft dargestellt. Abbildung 9 illustriert anhand von drei Beispielen den Einfluss der Parameter $\lambda_{1,2}$ auf die Form der WDF. Es ist zu erkennen, dass eine Verschiebung der Parameter $\lambda_{1,2} \rightarrow \lambda_{1,2} + b$ um ein $b \in \mathbb{R}$ den Erwartungswert der Verteilung erhält und nur die Varianz ändert, wohingegen sich eine Skalierung $\lambda_{1,2} \rightarrow x \lambda_{1,2}$ mit einem $x \in \mathbb{R}$ auch auf den Erwartungswert auswirkt, denn Parameter der orangen Verteilung sind um $b = 5$ gegenüber denen der blauen verschoben, während die Parameter der grünen Verteilung gegenüber der blauen um $x = 3$ skaliert sind. Das asymptotische Verhalten der Skellam-WDF verhält sich analog zur Poissonverteilung. Für große $\lambda_{1,2}$ nähert sich die Verteilung der Normalverteilung $f_{\text{G}}(\Delta k; \mu = \lambda_1 - \lambda_2, \sigma^2 = \lambda_1 + \lambda_2)$. Dieses Verhalten ist anhand zweier Beispiele für $\lambda_{1,2}$ in Abbildung 10 dargestellt. Um einen Maximum-Likelihood-Schätzer für \tilde{d} zu erhalten, wird im Histogramm der Verteilung einer CP-sensitiven Observablen O eine gerade Anzahl n_{Bins} an Bins gewählt und mit Hilfe der Ereignisanzahlen $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n_{\text{Bins}}})$ definiert:

$$k_i^{\pm} := k_{i + \frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \pm k_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2} - i + 1} \quad , \quad i \in \left\{ 1, \dots, \frac{n_{\text{Bins}}}{2} \right\} \quad , \quad (51)$$

was einer Spiegelung des Datenhistogramms um $O = 0$ mit darauf folgender Addition (k_i^+) bzw. Subtraktion (k_i^-) der gemessenen und der gespiegelten Verteilung von O entspricht, wobei nur der Bereich $O > 0$ dieser beiden Verteilungen verwendet wird. Aus \mathbf{k}^+ und \mathbf{k}^- kann die ursprünglich gemessene Verteilung mit

$$\mathbf{k}_{1,2} = \frac{1}{2} (\mathbf{k}^+ \pm \mathbf{k}^-) \quad , \quad (52)$$

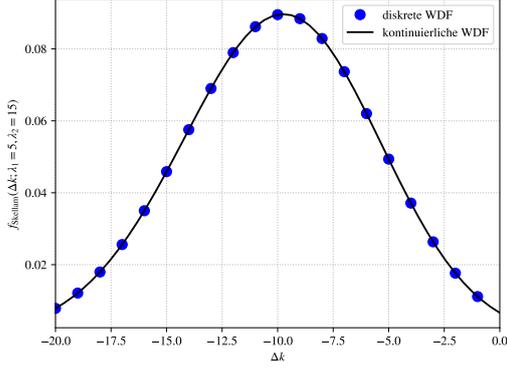


Abbildung 8: Fortsetzung der diskreten Skellam-Wahrscheinlichkeitsverteilung auf kontinuierliche, reelle Werte von Δk durch die kontinuierliche WDF $f_{\text{Skellam}}(\Delta k; \lambda_1=5, \lambda_2=15)$.

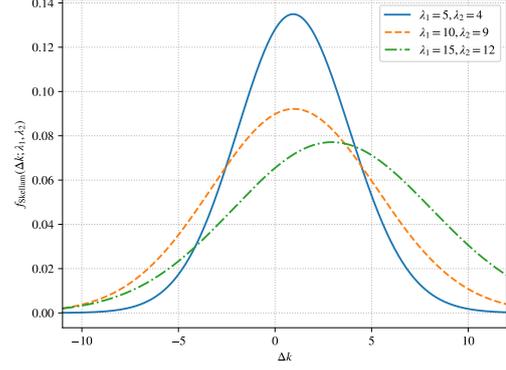
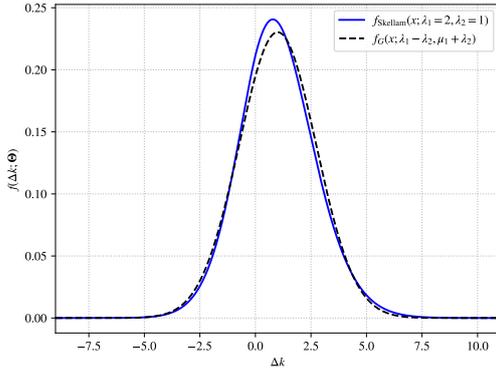
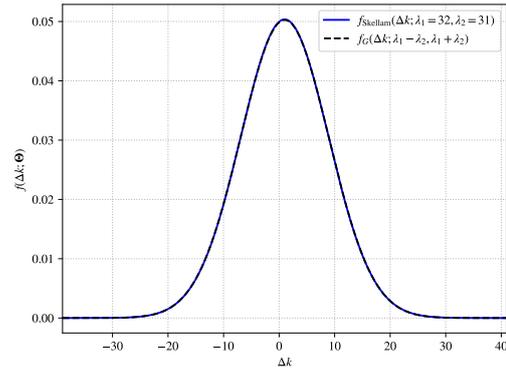


Abbildung 9: Vergleich der WDF für verschiedene Werte der Parameter $\lambda_{1,2}$. Die Parameter der orangen Verteilung sind gegenüber der blauen um $b = 5$ verschoben, die der grünen Verteilung gegenüber der blauen um $x = 3$ skaliert.



(a) f_{Skellam} und f_G für $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.



(b) f_{Skellam} und f_G für $\lambda_1 = 32, \lambda_2 = 31$.

Abbildung 10: Asymptotische Annäherung der Skellamverteilung an die Normalverteilung. reproduziert werden, wobei zur Vereinfachung der Notation

$$k_{1,i} := k_{i+\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \quad , \quad (53)$$

$$k_{2,i} := k_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}-i+1} \quad , \quad (54)$$

definiert wurde. Dies wird auch auf die Theorievorhersage $\lambda_i(\tilde{d})$ angewandt:

$$\lambda_i^\pm := \lambda_{i+\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \pm \lambda_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}-i+1} \quad , \quad (55)$$

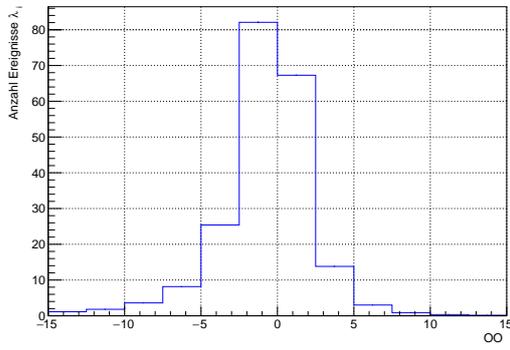
$$\lambda_{1,2} := \frac{1}{2} (\lambda^+ \pm \lambda^-) \quad , \quad (56)$$

wobei die $\lambda_{1,2}$ in Gleichung 56 analog zu $\mathbf{k}_{1,2}$ in Gleichung 52 definiert seien:

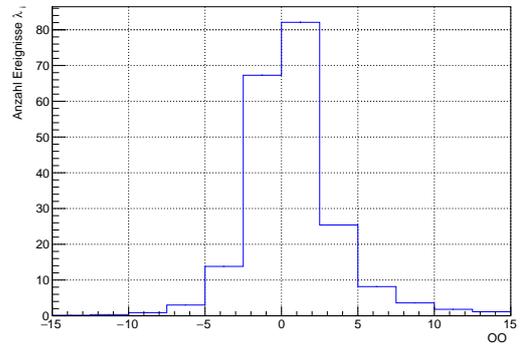
$$\lambda_{1,i} := \lambda_{i+\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \quad , \quad (57)$$

$$\lambda_{2,i} := \lambda_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}-i+1} \quad . \quad (58)$$

Die Differenzen λ^- bzw. \mathbf{k}^- enthalten die Information über die asymmetrischen Anteile der Observablenverteilung, während die Summen λ^+ bzw. \mathbf{k}^+ die Information über die symmetrischen Beiträge enthalten. Eine Illustration der einzelnen Schritte dieses Verfahrens ist in den Abbildungen 11 und 12 am Beispiel der erwarteten Verteilung der in Abschnitt 2.8.2 definierten optimalen Observablen \mathcal{O} für $\tilde{d} = -0.05$ zu sehen. Abbildung 11a zeigt diese Verteilung und Abbildung 11b die um $\mathcal{O} = 0$ gespiegelte Verteilung. In Abbildung 12a sind die erwarteten Differenzen λ_i^- der Ereignisanzahlen der positiven und der negativen Region der \mathcal{O} -Verteilung gezeigt und in Abbildung 12b ihre Summen λ_i^+ .

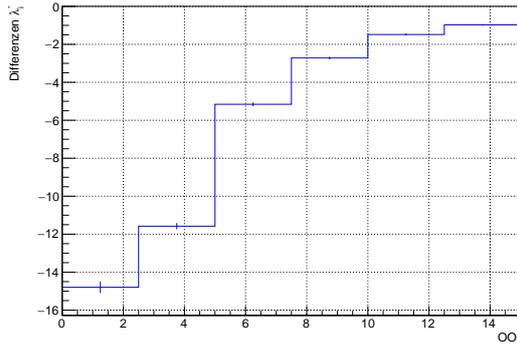


(a) Verteilung der CP-ungeraden Observablen \mathcal{O} .

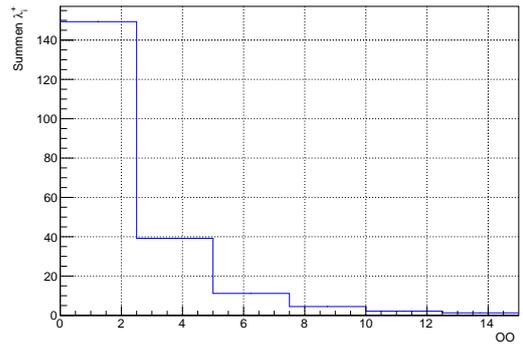


(b) Um $\mathcal{O} = 0$ gespiegelte Verteilung von \mathcal{O} .

Abbildung 11: Erwartete Verteilung einer CP-ungeraden Observablen O und die um $O = 0$ gespiegelte Verteilung. Hier wird beispielhaft die erwartete Verteilung der optimalen Observable \mathcal{O} für $\tilde{d} = -0.05$ gezeigt.



(a) Differenzen λ_i^- der Ereignisanzahlen.



(b) Summen λ_i^+ der Ereignisanzahlen.

Abbildung 12: Die durch Gleichung 55 definierte Differenzen bzw. Summen der Ereignisanzahlen in der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen O . Im hier gezeigten Beispiel wird die optimale Observable \mathcal{O} für $\tilde{d} = -0.05$ betrachtet.

Unter Annahme der statistischen Unabhängigkeit aller k_i^\pm kann man die Likelihoodfunktion jetzt als Produkt einer Poisson-Likelihoodfunktion für \mathbf{k}^+ und einer Skellam-Likelihoodfunktion

für \mathbf{k}^- schreiben:

$$L_{\text{Skellam}}(\tilde{d}, \boldsymbol{\lambda}^+) = \prod_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} f_{\text{Poisson}}(k_i^+; \lambda_i^+) f_{\text{Skellam}}(k_i^-, \lambda_{1,i}(\tilde{d}, \lambda_i^+), \lambda_{2,i}(\tilde{d}, \lambda_i^+)) \quad . \quad (59)$$

Durch die Abhängigkeit der Asymmetrie von \tilde{d} (siehe Gleichung 70) erhält man eine Vorhersage für die Differenzen $\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}$. Die Werte $\lambda_{1,i}$ und $\lambda_{2,i}$ ergeben sich dann aus den Gleichungen 57 und 58. Damit enthält die Likelihoodfunktion in Gleichung 59 nun $\frac{n_{\text{Bins}}}{2} + 1$ freie Parameter $\{\tilde{d}, \lambda_1^+, \dots, \lambda_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}+}^+\}$. Der negative Logarithmus der Likelihoodfunktion ergibt sich zu

$$\begin{aligned} -\ln L_{\text{Skellam}}(\tilde{d}, \boldsymbol{\lambda}^+) &= -\sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \left[-(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}) + \frac{k_i^-}{2} \ln \left(\left| \frac{\lambda_{1,i}}{\lambda_{2,i}} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(I_{|k_i^-|} \left(2\sqrt{|\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}|} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_i^+ \ln (|\lambda_i^+|) - \lambda_i^+ \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \left[\frac{k_i^-}{2} \ln \left(\left| \frac{\lambda_i^+ + \lambda_i^-(\tilde{d})}{\lambda_i^+ - \lambda_i^-(\tilde{d})} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(I_{|k_i^-|} \left(\sqrt{|\lambda_i^+|^2 - (\lambda_i^-(\tilde{d}))^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_i^+ \ln (|\lambda_i^+|) - 2\lambda_i^+ \right] \quad . \quad (60) \end{aligned}$$

Die Beträge innerhalb der Logarithmusfunktionen wurden eingeführt, damit die NLL-Funktion $-\ln(L) : \mathbb{R}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}+1} \rightarrow \mathbb{R}$ für ihren gesamten Definitionsbereich wohldefiniert ist. Für negative Argumente ist nämlich die reelle Logarithmusfunktion nicht eindeutig definiert, und $I_\nu(z)$ kann für $z \notin \mathbb{R}_{>0}$ Werte mit nichtverschwindendem Imaginärteil annehmen. Um bei der Minimierung der NLL sicherzustellen, dass das Ergebnis für die $\lambda_{1,i}$, $\lambda_{2,i}$ im physikalischen Bereich liegt, werden zusätzlich die Zwangsbedingungen

$$\lambda_i^+ > 0 \quad , \quad (61)$$

$$\text{und } (\lambda_i^+)^2 - (\lambda_i^-)^2 > 0 \quad \forall \quad i \in \left\{ 1, \dots, \frac{n_{\text{Bins}}}{2} \right\} \quad , \quad (62)$$

eingeführt. Gleichung 61 ist darin begründet, dass die Summe λ_i^+ zweier poissonverteilter Ereignisanzahlen stets positiv sein muss, und für Gleichung 62 gilt selbiges für das durch $\lambda_{1,i} \cdot \lambda_{2,i} = \frac{1}{4} \left((\lambda_i^+)^2 - (\lambda_i^-)^2 \right)$ gegebene Produkt zweier solcher Ereignisanzahlen. Wie schon in der Poisson-NLL (Gleichung 48) wird im Poisson-Anteil der Skellam-NLL ein für alle Bins

konstanter Parameter b eingeführt, um den Untergrund zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
-\ln L_{\text{Skellam}}(\tilde{d}, \boldsymbol{\lambda}^+, b) = & - \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \left[\frac{k_i^-}{2} \ln \left(\left| \frac{\lambda_i^+ + \lambda_i^-(\tilde{d})}{\lambda_i^+ - \lambda_i^-(\tilde{d})} \right| \right) \right. \\
& + \ln \left(I_{|k_i^-|} \left(\sqrt{\left| (\lambda_i^+)^2 - (\lambda_i^-(\tilde{d}))^2 \right|} \right) \right) \\
& \left. + k_i^+ \ln (|\lambda_i^+ + 2b| - 2\lambda_i^+ - 2b) \right] . \tag{63}
\end{aligned}$$

In der Theorievorhersage für $\boldsymbol{\lambda}^- = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2$ verschwindet der als konstant angenommene Untergrund nach der Ersetzung $\lambda_{1,i} \rightarrow \lambda_{1,i} + b$ und $\lambda_{2,i} \rightarrow \lambda_{2,i} + b$. Somit wird auch für $\mathbf{k}^- = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ im Mittel ein Verschwinden des Untergrundes erwartet. Daher kann der Skellam-Anteil $f_{\text{Skellam}}(k_i^-, \lambda_{1,i}(\tilde{d}, \lambda_i^+), \lambda_{2,i}(\tilde{d}, \lambda_i^+))$ nicht von b abhängen. Gleichung 63 stellt nun im Maximum-Likelihood-Verfahren die Zielfunktion dar, welche zu minimieren ist. Von den $\frac{n_{\text{Bins}}}{2} + 2$ Parametern $\left\{ \tilde{d}, b, \lambda_1^+, \dots, \lambda_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}}^+ \right\}$ werden hier nur Konfidenzintervalle für \tilde{d} bestimmt, daher wird die in Abschnitt 5.3 besprochene Methode der Profillikelihood angewandt um eine Funktion $L_P(\tilde{d})$ zu erhalten.

6 Methoden für Test der CP-Invarianz

Die Verteilungen der beiden CP-ungeraden Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$, welche in Abschnitt 2.8 eingeführt wurden, ermöglichen es, eine hypothetische Verletzung der CP-Symmetrie im VBF-Produktionskanal des Higgs-Bosons zu testen. Die Methoden zum Test CP-Invarianz, welche in dieser Arbeit angewandt werden, werden in diesem Abschnitt allgemein für eine CP-ungerade Observable O beschrieben. Für solch eine Observable O wird unter der Standardmodellhypothese $\tilde{d} = 0$ eine symmetrische Verteilung erwartet. Ein CP-verletzender Beitrag zum Matrixelement \mathcal{M} (Gleichung 15) verursacht in dieser Verteilung eine Asymmetrie, welche nach Gleichung 70 als linear in \tilde{d} zu erwarten ist. Wie aus Abschnitt 2.5 hervorging, kann aus einem Wert $\tilde{d} \neq 0$ auf eine Verletzung der CP-Symmetrie geschlossen werden. Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Ansätze zur Untersuchung dieser Asymmetrie zu vergleichen.

Ein Ansatz ist es, \tilde{d} aus der Verteilung von O mit den in den Abschnitten 5.4 und 5.5 besprochenen Methoden durch Anpassung des jeweiligen Modells an die Verteilung bzw. an ihre Asymmetrie zu bestimmen. Dieses Verfahren wird in Abschnitten 6.1 und 6.2 erläutert. Es wird hierbei einerseits mit Hilfe der in Abschnitt 5.4 definierten Poisson-Likelihoodfunktion eine Maximum-Likelihood-Anpassung an die volle Verteilung vorgenommen, andererseits mit der in Abschnitt 5.5 diskutierten Skellam-Likelihoodfunktion eine Modellanpassung an die Asymmetrie der Verteilung. Letzterer Ansatz begründet sich in der Idee, dass sich in der Differenz zwischen der positiven und der negativen Region der Observablenverteilung ausschließlich diejenigen Beiträge zum Matrixelement der Vektorbosonfusion bemerkbar machen, welche CP-ungerader Natur sind. Die CP-geraden Beiträge zur Observablenverteilung werden hingegen als symmetrisch um $O = 0$ verteilt erwartet. Die Verletzung der CP-Invarianz bei der Produktion eines Higgs-Bosons mittels Vektorbosonfusion bewirkt also in der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen das Vorhandensein nichtverschwindender ungerader zentraler Momente. CP-erhaltende Physik jenseits des Standardmodells kann die geraden zentralen Momente ändern. Bestimmt man \tilde{d} , und damit die Stärke der CP-Verletzung in der HVV -Kopplung, aus der Asymmetrie der Observablenverteilung, so stellt dies einen reinen Test der CP-Invarianz dar.

Ein weiterer Ansatz ist es, den Mittelwert $\langle O \rangle$ zu verwenden, um einen Schätzer für \tilde{d} zu bestimmen. Das Verfahren hierzu wird in Abschnitt 6.3 erläutert. Zum Test der Verträglichkeit der Verteilung mit einer Hypothese \tilde{d}_{hyp} wird in beiden Fällen ein Konfidenzintervall $[a, b]$ zu einem Konfidenzniveau $1 - \gamma$ bestimmt. Per Konstruktion erlaubt ein solches Konfidenzintervall einen Hypothesentest zum Signifikanzniveau γ durch Verwerfen einer Hypothese \tilde{d}_{hyp} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} \notin [a, b]$.

6.1 Bestimmung von \tilde{d} aus der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen

Mit den in Kapitel 5 eingeführten Methoden kann die Anpassung des durch die erwartete Verteilung der CP-ungeraden Observablen gegebenen Modells, welches \tilde{d} als freien, kontinuierlichen Parameter enthält, an die Verteilungen der in Abschnitt 2.8 besprochenen Observablen vorgenommen werden. Die Profillikelihood-Methode wird hierbei verwendet, um aus der als

Stichprobe vorliegenden Observablenverteilung einen Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ sowie ein Konfidenzintervall $[a, b]$ zu bestimmen. Das hier angewandte Modell verwendet die in Kapitel 4 beschriebene Theorievorhersage für $\tilde{d} \in [-1, 1]$, welche unter Anwendung des in Abschnitt 4.4 eingeführten Interpolationsverfahrens eine kontinuierliche Anpassung von \tilde{d} erlaubt. Einen wichtigen Einfluss hat dabei die Normierung des Modells. Liegt eine Stichprobe mit einer Gesamtzahl N_{sp} an Ereignissen vor, so kann das Modell, welches nach Gleichung 20 eine quadratisch von \tilde{d} abhängige Gesamtzahl $N(\tilde{d})$ an Ereignissen vorhersagt, auf die Stichprobe normiert werden. Dazu wird die Anzahl der Ereignisse $\lambda_i(\tilde{d})$ in jedem Bin mit einem Faktor $\frac{N_{\text{sp}}}{N(\tilde{d})}$ multipliziert:

$$\lambda_i(\tilde{d}) \longrightarrow \lambda_i(\tilde{d}) \frac{N_{\text{sp}}}{N(\tilde{d})} \quad (64)$$

Dadurch wird in der Modellanpassung ausschließlich die Form der Observablenverteilung ausgenutzt. Ein Einsetzen der Gleichungen 20 und 31 in den Normierungsfaktor offenbart eine veränderte \tilde{d} -Abhängigkeit der Ereignisanzahl λ_i in einem Bin:

$$\lambda_i(\tilde{d}) = \lambda_{i, \text{SM}} \frac{1 + c_{1,i}\tilde{d} + c_{2,i}\tilde{d}^2}{N_{\text{SM}} + c\tilde{d}^2} \quad . \quad (65)$$

Dadurch wird der negative Logarithmus der Poisson-Likelihoodfunktion (Gleichung 48) zu:

$$\begin{aligned} -\ln \left(L_{\text{Poisson}}(\tilde{d}) \right) &= \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \lambda_i(\tilde{d}) - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} k_i \ln \left(\lambda_i(\tilde{d}) \right) \\ &= N - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} k_i \ln \left(\lambda_i(\tilde{d}) \right) \quad , \end{aligned} \quad (66)$$

wobei

$$N = \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \lambda_i(\tilde{d}) = N_{\text{sp}} = \text{const.} \quad , \quad (67)$$

aufgrund der Normierung nicht von \tilde{d} abhängt und damit in der Minimierung der Likelihoodfunktion sowie der Bestimmung der Konfidenzintervalle mit Gleichung 44 keinen Einfluss hat. Hier bezeichnet λ_i die erwartete Anzahl der Ereignisse unter einer \tilde{d} -Hypothese in Bin i und $\lambda_{i, \text{SM}}$ die entsprechende Anzahl im Standardmodell, d.h. für $\tilde{d} = 0$.

Lässt man, anstatt die Theorievorhersage auf die Stichprobe zu normieren, die Gesamtanzahl der nach Gleichung 20 im Modell vorhergesagten Ereignisse unverändert, so ergibt sich für den negativen Logarithmus der Poisson-Likelihoodfunktion (Gleichung 48):

$$\begin{aligned} -\ln \left(L_{\text{Poisson}}(\tilde{d}) \right) &= \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \lambda_i(\tilde{d}) - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} k_i \ln \left(\lambda_i(\tilde{d}) \right) \\ &= N(\tilde{d}) - \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} k_i \ln \left(\lambda_i(\tilde{d}) \right) \quad , \end{aligned} \quad (68)$$

was gerade der negative Logarithmus der Likelihoodfunktion für die erweiterte Maximum-Likelihood-Methode (EML) ist, bei der $N(\tilde{d})$ in der Modellanpassung als freier Parameter behandelt wird [48]. Enthält die Likelihoodfunktion zusätzlich einen Untergrundparameter b , so

ist N gegeben durch

$$N(\tilde{d}, b) = n_{\text{Bins}} \cdot b + \sum_{i=1}^{n_{\text{Bins}}} \lambda_i(\tilde{d}) \quad , \quad (69)$$

und kann entsprechend im negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion (Gleichung 48) identifiziert werden.

6.2 Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung

Analog zur Bestimmung von \tilde{d} aus der Observablenverteilung (Abschnitt 6.1) wird bei der Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung unter Einsatz der Skellam-Likelihoodfunktion (Abschnitt 5.5) vorgegangen. Die Asymmetrie einer Observablenverteilung wird definiert als die Menge $\boldsymbol{\lambda}^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}}^-)$ der nach dem in Abschnitt 5.5 erläuterten Verfahren bestimmten Differenzen $\lambda_i^- = \lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}$. Für diese Differenzen ergibt sich mit Gleichung 31 die erwartete Abhängigkeit

$$\lambda_i^-(\tilde{d}) = 2c_{1,i} \lambda_{i,\text{SM}} \quad . \quad (70)$$

Die quadratischen Terme in $\lambda_{1,i}$ und $\lambda_{2,i}$ heben sich gegenseitig auf, da CP-gerade Beiträge symmetrisch in die Observablenverteilung eingehen. Nach der Normierung auf N_{sp} ergibt sich:

$$\lambda_i^-(\tilde{d}) = 2\lambda_{i,\text{SM}} \frac{c_{1,i} \tilde{d}}{N_{\text{SM}} + c\tilde{d}^2} \quad . \quad (71)$$

Für die Summe λ_i^+ erhält man:

$$\lambda_i^+(\tilde{d}) = 2\lambda_{i,\text{SM}} \frac{1 + c_{2,i} \tilde{d}^2}{N_{\text{SM}} + c\tilde{d}^2} \quad . \quad (72)$$

Hier heben sich die linearen Terme gegenseitig auf, da die CP-ungeraden Beiträge, welche linear in \tilde{d} sind, asymmetrisch in die Observablenverteilung eingehen. Mit

$$N = \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \lambda_i^+ = N_{\text{sp}} = \text{const.} \quad , \quad (73)$$

wird die Likelihoodfunktion (Gleichung 60) zu

$$\begin{aligned} -\ln \left(L_{\text{Skellam}}(\tilde{d}, \boldsymbol{\lambda}^+) \right) &= 2N - \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \left[\frac{k_i^-}{2} \ln \left(\left| \frac{\lambda_i^+ + \lambda_i^-(\tilde{d})}{\lambda_i^+ - \lambda_i^-(\tilde{d})} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(I_{|k_i^-|} \left(\sqrt{|\lambda_i^+|^2 - (\lambda_i^-(\tilde{d}))^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_i^+ \ln(|\lambda_i^+|) \right] \quad . \quad (74) \end{aligned}$$

Mit

$$N(\boldsymbol{\lambda}^+) = \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \lambda_i^+ \quad (75)$$

als freiem Parameter ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\ln \left(L_{\text{Skellam}}(\tilde{d}, \boldsymbol{\lambda}^+) \right) &= 2N(\boldsymbol{\lambda}^+) - \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \left[\frac{k_i^-}{2} \ln \left(\left| \frac{\lambda_i^+ + \lambda_i^-(\tilde{d})}{\lambda_i^+ - \lambda_i^-(\tilde{d})} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(I_{|k_i^-|} \left(\sqrt{\left| (\lambda_i^+)^2 - (\lambda_i^-(\tilde{d}))^2 \right|} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_i^+ \ln(|\lambda_i^+|) \right] . \end{aligned} \quad (76)$$

Dies ist der negative Logarithmus der erweiterten Maximum-Likelihood-Methode für die Skellam-Likelihoodfunktion. Unter Berücksichtigung eines Untergrundparameter b ist N gegeben durch

$$\text{bzw. } N(\boldsymbol{\lambda}^+, b) = n_{\text{Bins}} \cdot b + \sum_{i=1}^{\frac{n_{\text{Bins}}}{2}} \lambda_i^+ , \quad (77)$$

und kann entsprechend im negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion (Gleichung 63) identifiziert werden.

6.3 Bestimmung von \tilde{d} aus dem Mittelwert der Observablenverteilung

Durch die von $\tilde{d} \neq 0$ verursachte Asymmetrie in der Verteilung einer CP-ungeraden Observablen O wird der Mittelwert $\langle O \rangle$ ungleich 0. Die erwartete Abhängigkeit des Mittelwertes von \tilde{d} ergibt sich aus der Integration über den Wirkungsquerschnitt:

$$\langle O \rangle = \frac{\int O d\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d} \int O \cdot d\sigma_{\text{CP-ungerade}} + \tilde{d}^2 \int O \cdot d\sigma_{\text{CP-gerade}}}{\int d\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d} \int d\sigma_{\text{CP-ungerade}} + \tilde{d}^2 \int d\sigma_{\text{CP-gerade}}} . \quad (78)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.7 erläutert, verschwindet das Integral über den CP-ungeraden Anteil des Wirkungsquerschnittes im Nenner. Im Zähler verschwinden die beiden Terme, in denen die CP-ungerade Observable O über die CP-geraden Phasenräume, d.h. über $d\sigma_{\text{SM}}$ und $d\sigma_{\text{CP-gerade}}$ integriert werden. Man erhält also für den Mittelwert von O den folgenden, von \tilde{d} abhängigen Ausdruck:

$$\langle O \rangle = \frac{\tilde{d} \int O d\sigma_{\text{CP-ungerade}}}{\int d\sigma_{\text{SM}} + \tilde{d}^2 \int d\sigma_{\text{CP-gerade}}} . \quad (79)$$

In erster Näherung zeigt $\langle O \rangle$ folglich ein lineares Verhalten für kleine Werte $|\tilde{d}| \approx 0$, für große $|\tilde{d}|$ nähert sich $\langle O \rangle$ asymptotisch dem Wert 0, wie anhand eines Beispiels in Abbildung 13 zu erkennen ist.

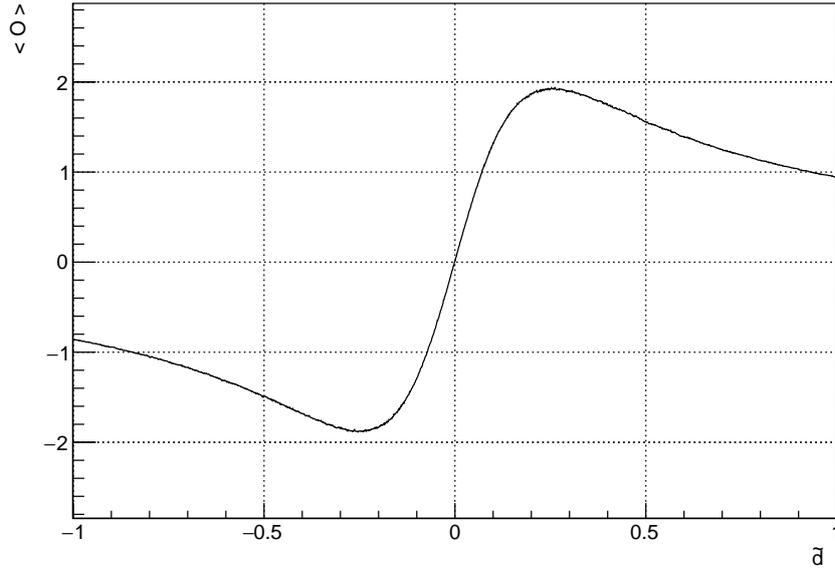


Abbildung 13: Beispiel für die Eichkurve des Mittelwertes $\langle O \rangle$ einer CP-ungeraden Observablen O . Es ist ein lineares Verhalten für $|\tilde{d}| \approx 0$ zu erkennen. Für große $|\tilde{d}|$ geht der Mittelwert gegen 0.

Zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls für \tilde{d} unter der Verwendung des Mittelwertes $\langle O \rangle$ der Verteilung von O wird zu verschiedenen \tilde{d} -Hypothesen jeweils eine große Anzahl an Pseudoexperimenten generiert. Aus der Verteilung der Mittelwerte der Pseudoexperimente zu jeder \tilde{d} -Hypothese ergeben sich die zentralen Konfidenzintervalle aus den entsprechenden Quantilen, wie in Abschnitt 5.2.1 erläutert wurde. Die Menge der Mittelwerte aller Hypothesen in Abhängigkeit von \tilde{d} wird im Folgenden als Eichkurve bezeichnet. Weiterhin wird der durch die Konfidenzintervalle gegebene Konfidenzgürtel im Folgenden als Konfidenzband bezeichnet. Unter Annahme der Beobachtung eines Mittelwertes $\langle O \rangle$ der O -Verteilung zu einer \tilde{d} -Hypothese aus der Theorievorhersage kann aus der Eichkurve ein Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ bestimmt werden. Das Konfidenzband wird genutzt, um ein Konfidenzintervall zu konstruieren. Wie man in Abbildung 13 erkennt, besitzt die Eichkurve ein Minimum für ein $\tilde{d} < 0$ und ein Maximum für ein $\tilde{d} > 0$ (hier bei etwa $|\tilde{d}| \approx 0.2$). Liegt der (hypothetisch) gemessene Mittelwert außerhalb des Bereiches, welcher durch die zu diesen Extremstellen gehörigen $\langle O \rangle$ -Werten begrenzt ist, so kann kein eindeutiger Schätzer bestimmt werden. Zur Bestimmung von \tilde{d} und den zugehörigen Konfidenzintervallen wird in Kapitel 10 nur der Bereich zwischen den Extremstellen verwendet. Dieser Bereich ist für die hier durchgeführte Studie zum Test der CP-Invarianz in der Produktion des Higgs-Bosons durch Vektorbosonfusion ausreichend, da Messungen aus *Run-1* des LHC den Wert von \tilde{d} bereits auf das Intervall $[-0.11, 0.05]$ zum Konfidenzniveau 68.3% eingeschränkt haben [20]. Abbildung 14 soll die Bestimmung eines Schätzers und des zugehörigen Konfidenzintervalles veranschaulichen. Hier wird die Beobachtung von $\langle O \rangle = 0$ angenommen und aus der Eichkurve (schwarz) und dem zugehörigen Konfidenzband (grau) ein Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ (blaue durchgängige Linie) und ein Konfidenzintervall $[a, b]$ (blau gestrichelte Linien) bestimmt. Außerdem kann anhand von Abbildung 14 auch nachvollzogen werden, dass diese Methode der Konstruktion nur für hinreichend kleine Werte von $|\langle O \rangle|$ eine hohe Sensitivität besitzt. Im hier gezeigten Beispiel ist der Bereich hoher Sensitivität etwa durch $|\langle O \rangle| \lesssim 1$ gegeben.

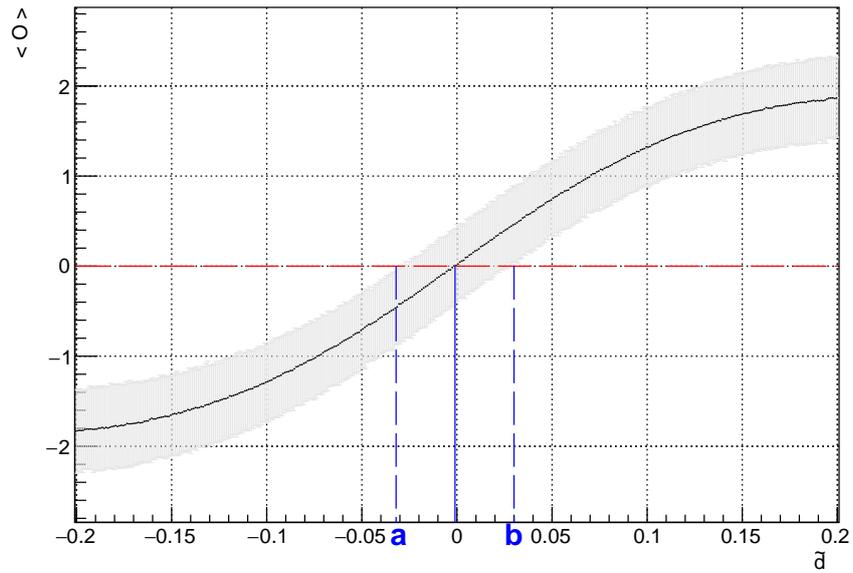


Abbildung 14: Bestimmung des besten Schätzwertes für \tilde{d} (blaue durchgängige Linie) und des Konfidenzintervalls $[a, b]$ (blaue gestrichelte Linien) aus der Eichkurve (schwarz) und dem zugehörigen Konfidenzband (grau) für den Zusammenhang zwischen $\langle O \rangle$ und \tilde{d} . Beispielhaft ist die Bestimmung von \tilde{d} und $[a, b]$ für die Annahme der Beobachtung $\langle O \rangle = 0$ (rot) gezeigt.

7 Abhängigkeit der Observablenverteilung von \tilde{d}

Im Folgenden werden einige Abbildungen diskutiert, welche die erwarteten Verteilungen der Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ sowie die zugehörigen Differenzen λ_i^- und Summen λ_i^+ zu $\tilde{d} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ zeigen. $\tilde{d} = 0.00$ entspricht dabei der Vorhersage des Standardmodells.

7.1 Observablenverteilung unter Berücksichtigung der \tilde{d} -Abhängigkeit der Ereignisanzahl N

Nach Gleichung 19 erwartet man einen Anstieg der Gesamtanzahl $N(\tilde{d})$ der Ereignisse mit \tilde{d}^2 :

$$N(\tilde{d}) = 200 + c\tilde{d}^2 \quad .$$

Abbildung 15 bestätigt diesen Zusammenhang. In der Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ist die Ereignisanzahl für $\tilde{d} \neq 0$ zunehmend größer als in der Verteilung von \mathcal{OO} . Der Grund hierfür ist, dass \mathcal{OO} für einen Wertebereich $(-\infty, +\infty)$ definiert ist, und somit durch die Einschränkung auf $|\mathcal{OO}| \leq 15$ einige Ereignisse nicht berücksichtigt werden. $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ hingegen ist nur für $(-\pi, \pi]$ definiert, weshalb die hier untersuchten $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilungen alle selektierten Ereignisse enthalten. Es wurde für \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ jeweils die Anpassung einer Parabel der Form $N(\tilde{d}) = 200 + c\tilde{d}^2$ vorgenommen. Für c ergibt sich bei \mathcal{OO} bzw. $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ jeweils:

$$c_{\mathcal{OO}} = 3147.5 \pm 0.6 \tag{80}$$

$$c_{\Delta\Phi} = 3611.7 \pm 0.4 \quad . \tag{81}$$

Die Parabeln, die sich dadurch ergeben, sind ebenfalls in Abbildung 20 dargestellt.

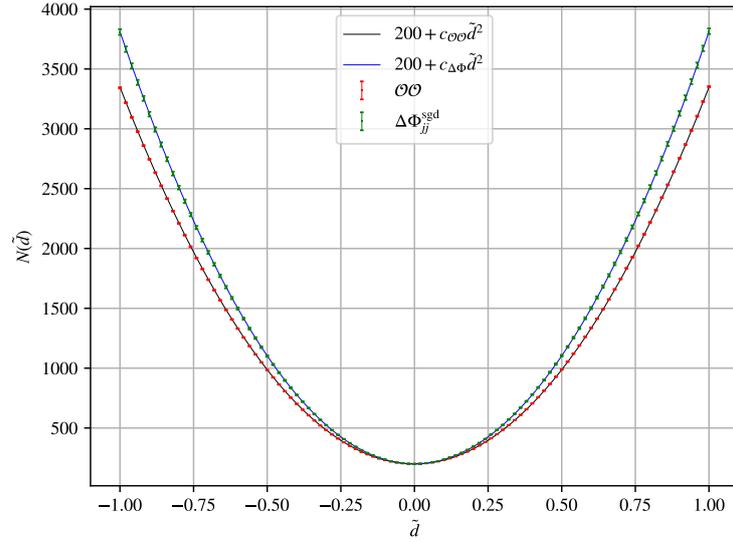


Abbildung 15: Erwartete Ereignisanzahl $N(\tilde{d})$ in den Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ und Ergebnisse der jeweils durchgeführten Parabelanpassungen.

Einfluss von \tilde{d} auf die Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{OO}

Das in Abbildung 15 dargestellte Anwachsen der Ereignisanzahl mit $|\tilde{d}|$ kann auch in Abbildung 16 anhand der Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{OO} beobachtet werden. In Abbildung 17 ist dieser Zusammenhang noch klarer, da die Summe λ_i^+ in jedem Bin mit $|\tilde{d}|$ anwächst. Weiterhin kann, wie erwartet, die Ausprägung einer Asymmetrie für $\tilde{d} \neq 0$ festgestellt werden. Für $\tilde{d} = -0.05$ ist die Verteilung rechtsschief, für $\tilde{d} = 0.20$ linksschief. Dies bestätigt auch Abbildung 17a, die für $\tilde{d} = -0.05$ negative Differenzen λ_i^- zeigt und für $\tilde{d} = 0.20$ positive Differenzen.

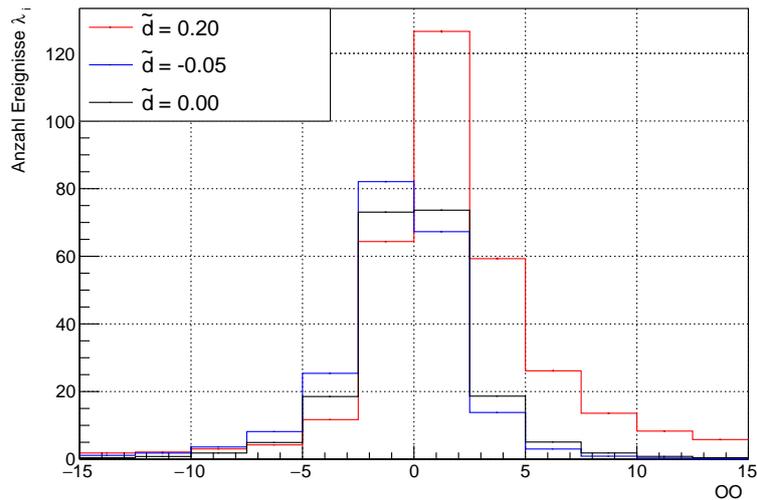
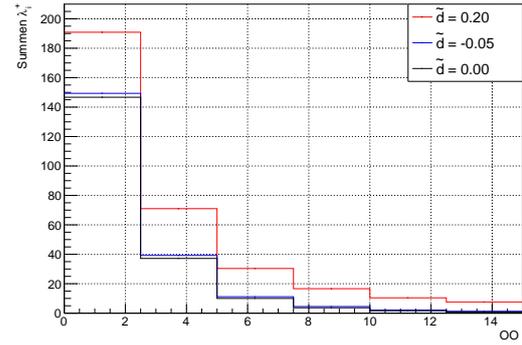
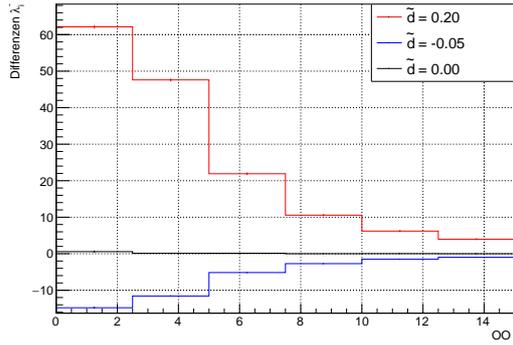


Abbildung 16: Erwartete Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{OO} für verschiedene \tilde{d} .



(a) Erwartete Differenzen λ_i^- für die Verteilung von \mathcal{OO} .

(b) Erwartete Summen λ_i^+ für die Verteilung von \mathcal{OO} .

Abbildung 17: Erwartung für die Differenzen λ_i^- und Summen λ_i^+ der Verteilung der Optimalen Observablen \mathcal{OO} .

Die Differenzen λ_i^- der einzelnen Bins sind in Abbildung 18 dargestellt. Die Bins 1 bis 6 sind diejenigen, die in den hier untersuchten Verteilungen enthalten sind, wohingegen Bin 7 (Magenta) die Differenz zwischen den *overflow*- und *underflow*-Bins enthält, also die Differenz zwischen Anzahl von Ereignissen mit $\mathcal{OO} > 15$ und der Anzahl mit $\mathcal{OO} < -15$. Nach Gleichung 70 erwartet man einen linearen Zusammenhang, wobei für $\tilde{d} = 0$ alle Differenzen verschwinden. Es lässt sich jedoch für große \tilde{d} -Werte in einzelnen Bins ein leicht von einer Ursprungsgeraden abweichendes Verhalten feststellen.

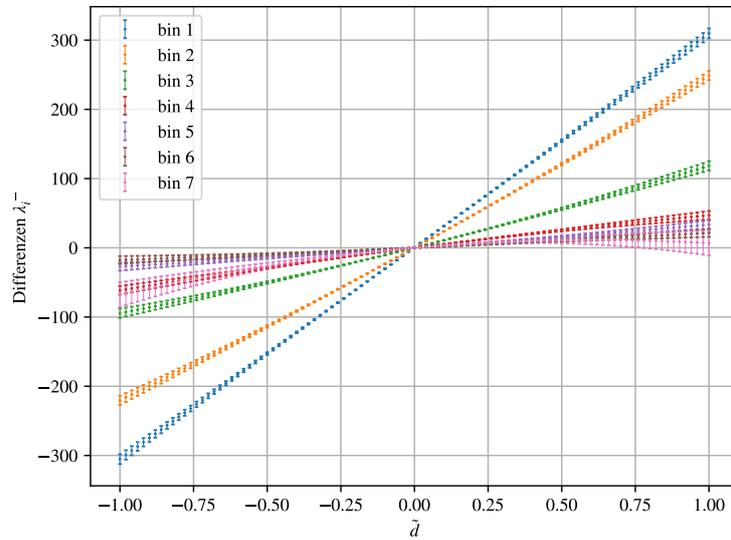


Abbildung 18: Differenzen λ_i^- (\tilde{d}) für die einzelnen Bins der \mathcal{OO} -Verteilung. Bin 7 (Magenta) enthält die Differenz zwischen *overflow*- und *underflow*-Bin.

Einfluss von \tilde{d} auf die Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Die Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ist in Abbildung 19 dargestellt. Sie weist für $\tilde{d} \neq 0$ ebenfalls einen Anstieg der Ereignisanzahl N mit \tilde{d} auf. Dies auch hier an den Summen λ_i^+ in Abbildung 20b erkennbar, die in jedem einzelnen Bin mit $|\tilde{d}|$ wachsen. Auch die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ist für $\tilde{d} = -0.050$ rechtsschief, für $\tilde{d} = 0.20$ linksschief. Dementsprechend sind die Differenzen λ_i^- für $\tilde{d} = -0.050$ negativ und für $\tilde{d} = 0.20$ positiv, wie in Abbildung 20a zu sehen ist.

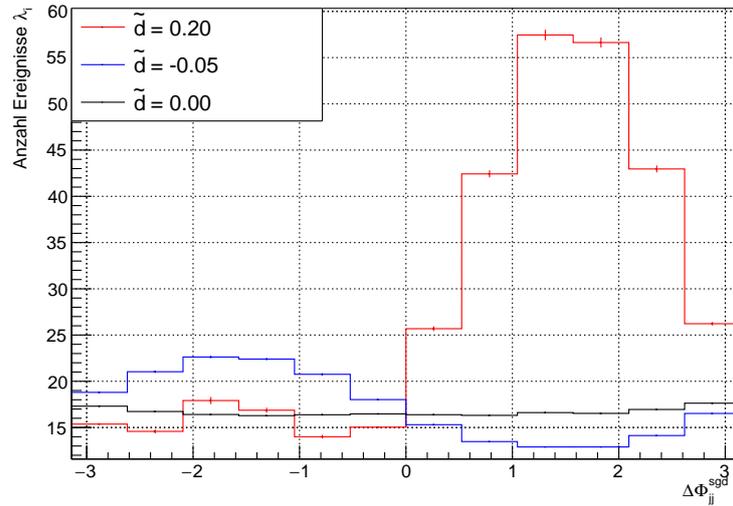
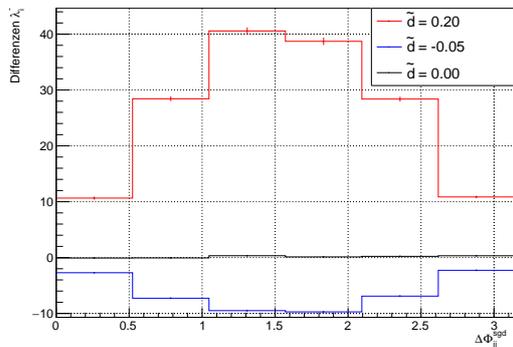
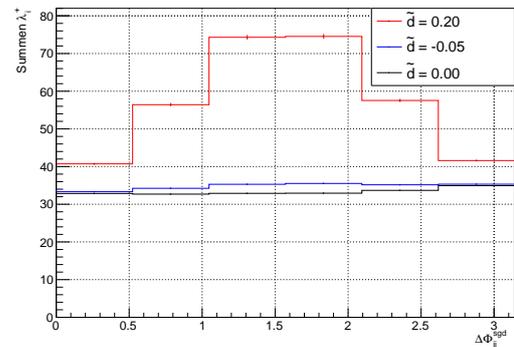


Abbildung 19: Erwartete Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ für verschiedene \tilde{d} .



(a) Erwartete Differenzen λ_i^- für die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$.



(b) Erwartete Summen λ_i^+ für die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$.

Abbildung 20: Erwartung für die Differenzen λ_i^- und Summen λ_i^+ der Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$.

In Abbildung 21 sind die Differenzen λ_i^- der einzelnen Bins in Abhängigkeit von \tilde{d} aufgetragen. Wieder lässt sich für große \tilde{d} -Werte ein nichtlineares Verhalten beobachten. Hier ist dies gut an den Differenzen für Bin 3 (grün) und Bin 4 (rot) sichtbar.

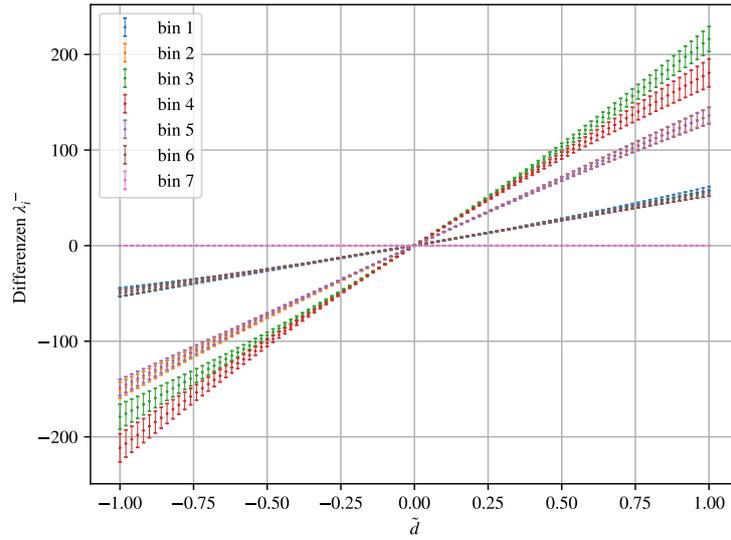


Abbildung 21: Erwartete Differenzen λ_i^- für die einzelnen Bins der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung. Bin 7 enthält die Differenz zwischen *underflow*- und *overflow*-Bin.

7.2 Observablenverteilung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl

Normiert man die aus der theoretischen Observablenverteilung ermittelten Histogramme gemäß Gleichung 64 auf die Ereignisanzahl N_{sp} einer Beobachtung, ändert sich die Asymmetrie der Verteilung zwar, qualitativ betrachtet, analog zum in Abschnitt 7.1 beobachteten Verhalten, jedoch ergibt sich eine veränderte \tilde{d} -Abhängigkeit der Ereignisanzahlen in den einzelnen Bins. Diese veränderte Abhängigkeit wird nun anhand der Annahme von $N_{\text{sp}} = 200$ untersucht.

Einfluss von \tilde{d} auf die Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{O}

Abbildung 22 zeigt die Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{O} für verschiedene \tilde{d} nach der Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen. In Abbildung 23 ist im ersten Bin eine Umkehrung der Verhältnisse zwischen den Summen λ_i^+ der verschiedenen Verteilungen, verglichen dem Entsprechenden Histogramm ohne Normierung (Abbildung 17), zu erkennen. Auch die Differenzen in Abbildung 23a zeigen eine veränderte Abhängigkeit von \tilde{d} . Dies wird insbesondere in Abbildung 24 deutlich, in der die Differenzen $\lambda_i^-(\tilde{d})$ dargestellt sind, wobei eine \tilde{d} -Anhängigkeit gemäß Gleichung 71 zu erwarten ist.

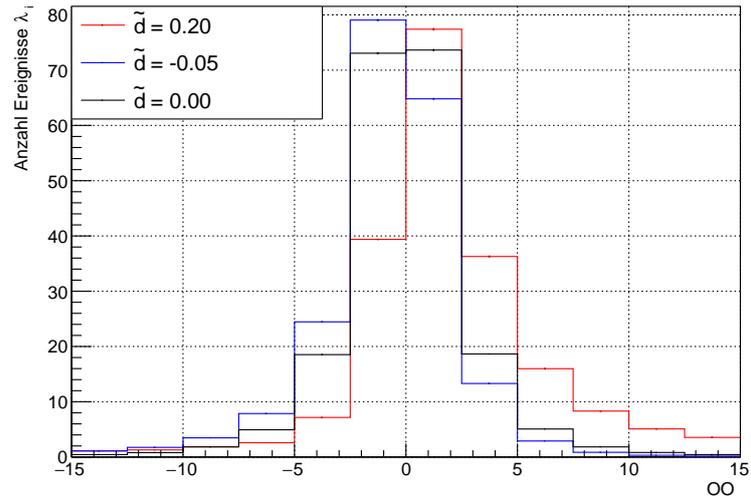
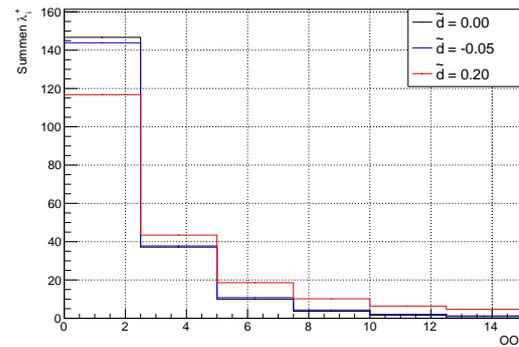
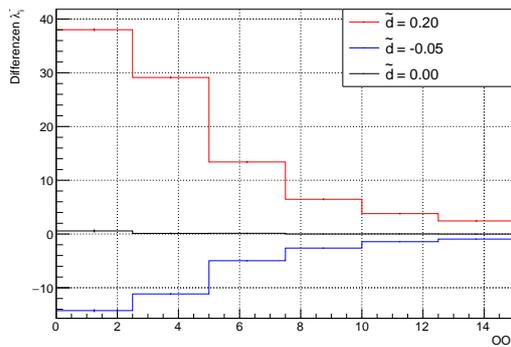


Abbildung 22: Erwartete Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{O} nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen.



(a) Erwartete Differenzen λ_i^- für die Verteilung von \mathcal{O} nach Normierung auf 200 Ereignisse.

(b) Erwartete Summen λ_i^+ für die Verteilung von \mathcal{O} nach Normierung auf 200 Ereignisse.

Abbildung 23: Erwartung für die Differenzen λ_i^- und Summen λ_i^+ der Verteilung der optimalen Observablen \mathcal{O} nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen.

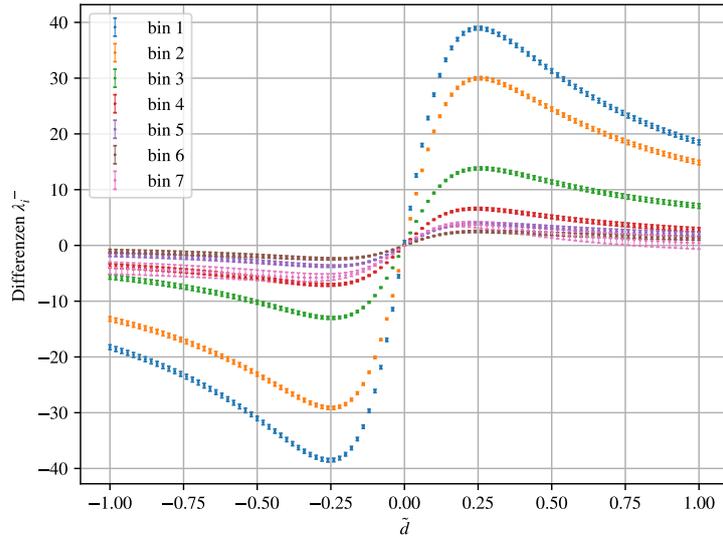


Abbildung 24: Differenzen $\lambda_i^-(\tilde{d})$ für die einzelnen Bins der \mathcal{OO} -Verteilung nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen. Bin 7 bezeichnet die Differenz zwischen *overflow*- und *underflow*-Bin.

Anhand von Abbildung 24 kann man erkennen, dass eine in einer Stichprobe beobachtete Differenz in einem Bin keine eindeutige Zuordnung eines entsprechenden \tilde{d} -Wertes ermöglicht. Diese Mehrdeutigkeit bleibt auch unter gleichzeitiger Betrachtung aller Bins erhalten. In Abbildung 24 ist dies zum Beispiel im Bereich um $\tilde{d} \approx 0.25$ erkennbar. Dort bleiben die Differenzen λ_i^- in allen Bins unter kleinen Änderungen von \tilde{d} näherungsweise konstant. Es wird sich später, in Abschnitt 9.2, zeigen, dass sich dies auf die Form der NLL-Kurven auswirkt. Im Bereich bis $|\tilde{d}| \approx 0.1$ zeigt $\lambda_i^-(\tilde{d})$ einen näherungsweise linearen Verlauf und ist dort eindeutig umkehrbar. Abbildung 25 zeigt die zu positiven \mathcal{OO} -Werten gehörigen Bineinträge $\lambda_{1,i}(\tilde{d})$ der \mathcal{OO} -Verteilung. Hier ist zwar in den einzelnen Bins ebenfalls nicht für jede Beobachtete Ereignisanzahl die eindeutige Zuordnung eines \tilde{d} -Wertes möglich, die Mehrdeutigkeit verschwindet jedoch unter gleichzeitiger Betrachtung der Beobachtungen in allen Bins. Für die Ereignisanzahl $\lambda_{1,i}$ ist im Bereich um $\tilde{d} \approx 0.25$ in den einzelnen Bins eine voneinander verschiedene Änderung von $\lambda_{1,i}$ mit \tilde{d} zu erwarten.

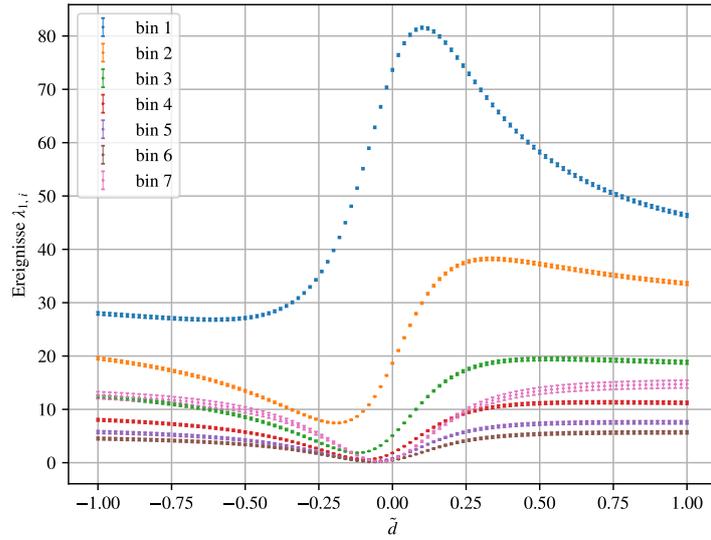


Abbildung 25: Änderung der einzelnen Bineinträge $\lambda_i(\tilde{d})$ mit \tilde{d} nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen. Bin 7 enthält die Ereignisse des *overflow*-Bins.

Einfluss von \tilde{d} auf die Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Für den vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkel $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ergibt sich eine ähnliche Abhängigkeit der Verteilung von \tilde{d} wie für die optimale Observable. Abbildung 26 zeigt die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ nach der Normierung auf 200 Ereignisse gemäß Gleichung 64. Die Änderung der Asymmetrie der Verteilung mit \tilde{d} ist qualitativ gleich wie im in Abschnitt 7.1 besprochenen Fall ohne Normierung. Die Abhängigkeit der Vorhersagen für die einzelnen Bins zeigen, wie auch bei der optimalen Observablen, eine gegenüber dem Fall ohne Normierung auf eine feste Ereignisanzahl veränderte Abhängigkeit von \tilde{d} . Dies gilt auch für die in Abbildung 27 dargestellten Summen λ_i^+ (Abbildung 27b) und Differenzen λ_i^- (Abbildung 27a).

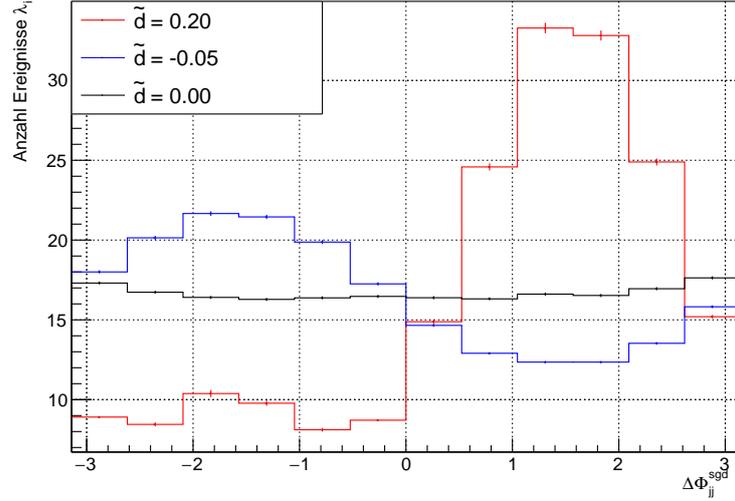
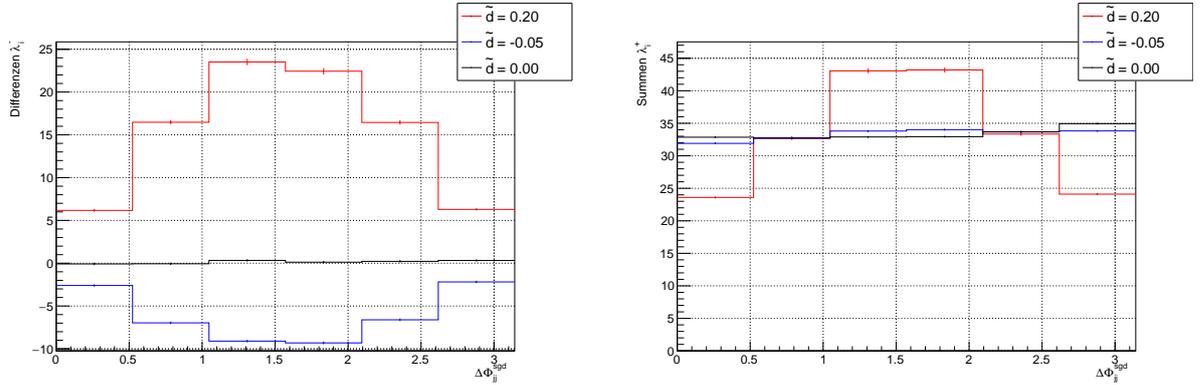


Abbildung 26: Erwartete Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen.



(a) Erwartete Differenzen λ_i^- für die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ nach Normierung auf 200 Ereignisse.

(b) Erwartete Summen λ_i^+ für die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ nach Normierung auf 200 Ereignisse.

Abbildung 27: Erwartung für die Differenzen λ_i^- und Summen λ_i^+ der Verteilung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen.

Die Abhängigkeit der Differenzen $\lambda_i^-(\tilde{d})$ in den einzelnen Bins der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung ist in Abbildung 28 dargestellt. Auch für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ lässt sich, wie schon zuvor für \mathcal{OO} , feststellen, dass die Beobachtung der Differenzen für die einzelnen Bins keine eindeutige Bestimmung eines zugehörigen \tilde{d} -Wertes zulässt. Die Mehrdeutigkeit verschwindet in der \tilde{d} -Abhängigkeit der Bineinträge $\lambda_i(\tilde{d})$, wie in Abbildung 29 zu erkennen ist. Dieses Verhalten lässt sich anhand der Form der Kurven um $\tilde{d} \approx 0.25$ in den Abbildungen 28 und 29 nachvollziehen. Die Differenzen λ_i^- werden für kleine Änderungen um $\tilde{d} \approx 0.25$ näherungsweise konstant bleiben, während dies für die Ereignisanzahlen $\lambda_{1,i}$ nicht zu erwarten ist.

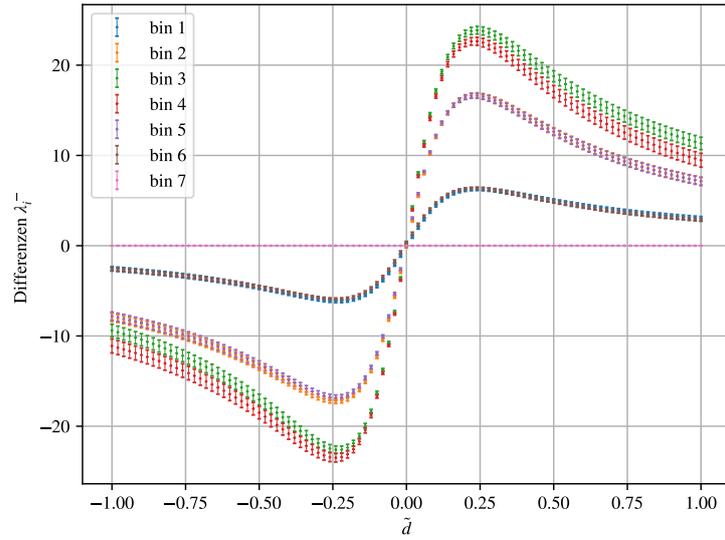


Abbildung 28: Erwartete Differenzen $\lambda_i^-(\tilde{d})$ für die einzelnen Bins der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung nach Normierung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen. Bin 7 bezeichnet die Differenz zwischen *overflow*- und *underflow*- Bin.

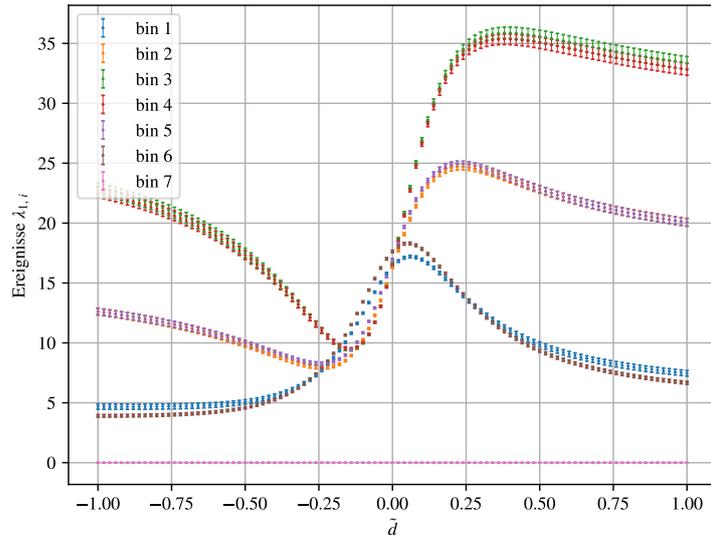


Abbildung 29: Erwartete Änderung der einzelnen Bineinträge $\lambda_i(\tilde{d})$ nach Normierung der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung auf eine Gesamtanzahl von 200 Ereignissen. Bin 7 ist der *overflow*-Bin.

8 Bestimmung von \tilde{d} aus den Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

In Kapitel 6 wurden drei Methoden erläutert, mit denen zum Test auf CP-Invarianz im VBF-Produktionskanal des Higgs-Bosons Schätzer und Konfidenzintervalle für den Parameter \tilde{d} , welcher die Stärke der CP-Verletzung beschreibt, bestimmt werden können. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse präsentiert, die sich aus der Maximum-Likelihood-Anpassung an die vollen Verteilungen der Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ergeben. Es kommt dabei die Poisson-Likelihoodfunktion zum Einsatz (siehe Abschnitt 6.1). Es wird zunächst in Abschnitt 8.1 die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung untersucht, in der die \tilde{d} -Abhängigkeit der Gesamtanzahl $N(\tilde{d})$ der in der Theorievorhersage erwarteten Ereignisse explizit ausgenutzt wird. Im Gegensatz dazu wird die theoretisch erwartete Verteilung in Abschnitt 8.2 auf die Beobachtung normiert und die Gesamtzahl N der vorhergesagten Ereignisse konstant gehalten und damit nur die Form der Verteilung verwendet. In Abschnitt 8.3 wird untersucht, welchen Einfluss ein CP-invarianter Untergrund auf die Ergebnisse der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung hat.

In diesem, wie auch in den folgenden Kapiteln, werden die Likelihoodkurven der erweiterten Maximum-Likelihoodfunktion stets als EML-Kurven bezeichnet und die Likelihoodkurven der Maximum-Likelihood-Anpassung mit konstanter Ereignisanzahl N als NLL-Kurven.

8.1 Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus der Bestimmung von \tilde{d} und der zugehörigen Konfidenzintervalle dargelegt, die man mit der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung der Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhält. Zunächst werden die erwarteten Likelihood-Kurven der erweiterten Maximum-Likelihood-Methode (EML-Kurven) ohne Berücksichtigung eines Untergrundes untersucht. Dazu wird die jeweils theoretisch erwartete Verteilung für beispielhaft angenommene \tilde{d} -Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ als Beobachtung angenommen. Zur Maximum-Likelihood-Anpassung wird der in Gleichung 68 gegebene negative Logarithmus der Poisson-Likelihoodfunktion verwendet. Es werden Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% bestimmt. Dazu wird Gleichung 44 verwendet:

$$\ln L_{\text{P}} \left(\Theta_{-\sigma_-}^{+\sigma_+} \right) = \ln L_{\text{max}} - \frac{\xi^2}{2} \quad .$$

Für das Konfidenzniveau 68.3% ist $\xi = 1$. Das 95.4%-Konfidenzintervall wird mit $\xi = 2$ bestimmt. Die zugehörigen Konfidenzintervalle sind durch die Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und die Unsicherheiten σ_{\pm} für das jeweilige Konfidenzniveau definiert als

$$[\hat{\tilde{d}} - \sigma_-, \hat{\tilde{d}} + \sigma_+] \quad . \tag{82}$$

Im zunächst betrachteten Fall der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung ohne Berücksichtigung eines Untergrundes besitzt die Likelihoodfunktion nur einen einzigen Parameter \tilde{d} . Somit ist hier $L_P = L$. Nur die Lage des Minimums des negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion und die Differenzen relativ zum Minimum werden zur Bestimmung der Schätzer und Konfidenzintervalle verwendet. Daher kann das Minimum der NLL als Nullpunkt festgelegt werden. Die Differenz des negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion zu seinem Minimum wird im Folgenden mit ΔNLL bezeichnet. Abbildung 30 zeigt die erwarteten Kurven für die Observablen $\mathcal{O}\mathcal{O}$ und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$. Der Bereich um die Minima, welcher zur Bestimmung der Konfidenzintervalle relevant ist, ist in Abbildung 31 dargestellt.

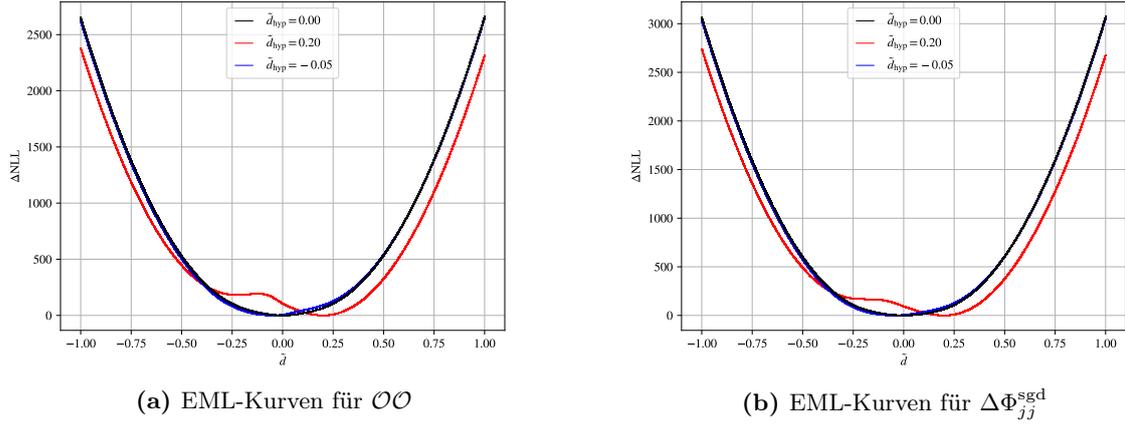


Abbildung 30: EML-Kurven der Modellanpassung an die Observablenverteilung.

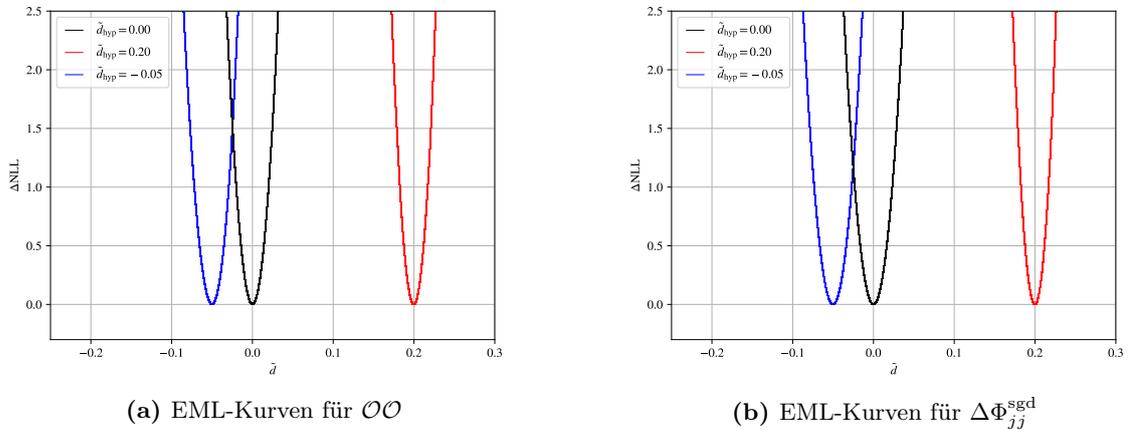


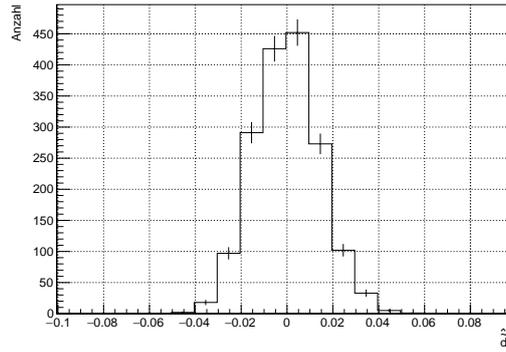
Abbildung 31: Bereich um die Minima der EML-Kurven

Der Einfluss der Abhängigkeit der Poisson-Likelihoodfunktion von der Ereignisanzahl $N(\tilde{d})$ ist für beide Observablen besonders durch Betrachtung der EML-Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ ersichtlich (Abbildung 30). Im Gegensatz zur Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$, welche eine parabolische Form annimmt, ist in der Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ eine Abweichung vom parabolischen Verlauf hin zu niedrigeren ΔNLL -Werten im Bereich um $\tilde{d} = -0.20$ zu erkennen. Diese Abweichung ist auch zu erwarten, ist doch die erwartete Ereignisanzahl $N(-\tilde{d})$ nach Gleichung 20 gleich $N(\tilde{d})$. Im Bereich um die Minima (Abbildung 31) nehmen die Kurven eine parabolische Form an. In

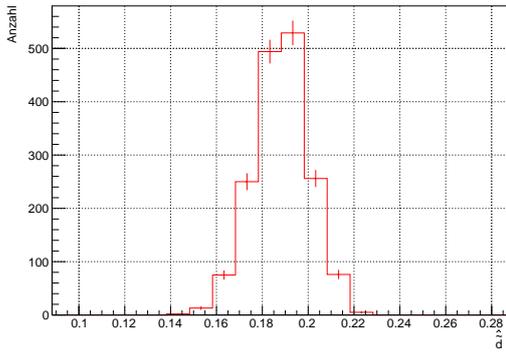
Tabelle 2 sind die Ergebnisse einzusehen, welche man für die Schätzer \hat{d} und die Unsicherheiten σ_{\pm} zu den beiden verschiedenen Konfidenzniveaus erhält. Die Schätzer \hat{d} stimmen mit der als Beobachtung angenommenen Theorievorhersage überein. Die Tatsache, dass die Unsicherheiten σ_{\pm} annähernd symmetrisch sind (also $\sigma_{-} \approx \sigma_{+}$) und darüber hinaus die Unsicherheiten zum Konfidenzniveau 95.4% etwa die doppelte Größe der 68.3%-Unsicherheiten besitzen, bestätigen die parabolische Form der EML-Kurven im Bereich um ihre jeweiligen Minima, welche mit Gleichung 44 erwartet wird. Für die Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.0$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ ist zu erkennen, dass die Unsicherheiten σ_{\pm} , welche aus der Verteilung von \mathcal{O} bestimmt wurden, kleiner sind als die aus der Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ sind sie etwa gleich groß.

	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_{-}	σ_{+}	σ_{-}	σ_{+}
\mathcal{O}	0.000	0.000	0.014	0.014	0.028	0.028
	0.200	0.200	0.012	0.012	0.025	0.024
	-0.050	-0.050	0.015	0.015	0.031	0.029
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.000	0.016	0.016	0.033	0.033
	0.200	0.200	0.012	0.012	0.025	0.023
	-0.050	-0.050	0.016	0.016	0.033	0.032

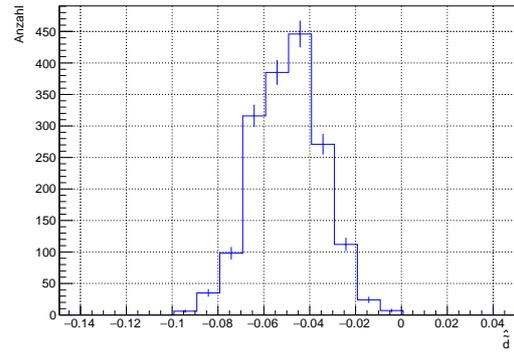
Tabelle 2: Aus der EML-Anpassung an die Observablenverteilung bestimmte Schätzer \hat{d} und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4% ohne Untergrund.



(a) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$



(b) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$



(c) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$

Abbildung 32: Verteilung der aus der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Schätzer \hat{d} aus 1700 Pseudoexperimenten

Um genauere Aussagen über die Verteilung $g(\hat{d}; \tilde{d})$ der Schätzer treffen zu können, wurden zu jeder \tilde{d} -Hypothese 1700 Pseudoexperimente generiert und zu jedem Pseudoexperiment ein Schätzer \hat{d} sowie die Unsicherheiten σ_{\pm} bestimmt. Es ist zu erwarten, dass die Verteilung der so erhaltenen Schätzer im Grenzfall unendlich vieler Pseudoexperimente der wahren Verteilung $g(\hat{d}; \tilde{d})$ entspricht. Die Verteilung der aus den Pseudoexperimenten bestimmten Schätzer \hat{d} für die verschiedenen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} ist in Abbildung 32 am Beispiel des aus der \mathcal{OO} -Verteilung erhaltenen Ergebnisses dargestellt. Gemäß der in Abschnitt 5.2.1 erläuterten exakten Konstruktion von Konfidenzintervallen kann aus Verteilung der Schätzer ein zentrales Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\rho := 1 - \gamma$ ein zentrales Konfidenzintervall aus den $\frac{1-\rho}{2}$ - bzw. $\frac{1+\rho}{2}$ -Quantilen bestimmt werden, was anhand der Gleichungen 39 und 40 gezeigt werden kann. Damit wird aus der Verteilung der Schätzer \hat{d} ein Konfidenzintervall $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% und ein Konfidenzintervall $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% bestimmt. Die so berechneten Werte sind in Tabelle 3 aufgeführt.

	\tilde{d}_{hyp}	$\langle \hat{d} \rangle$		68.3% KN		95.4% KN	
				a_1	b_1	a_2	b_2
\mathcal{O}	0.0000	-0.0005	\pm 0.0003	-0.014	0.013	-0.028	0.029
	0.2000	0.1883	\pm 0.0003	0.176	0.200	0.163	0.212
	-0.0500	-0.0492	\pm 0.0004	-0.064	-0.034	-0.079	-0.020
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.0000	-0.0001	\pm 0.0004	-0.017	0.017	-0.033	0.034
	0.2000	0.1989	\pm 0.0003	0.187	0.211	0.174	0.222
	-0.0500	-0.0496	\pm 0.0004	-0.066	-0.033	-0.081	-0.015

Tabelle 3: Aus 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle \hat{d} \rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau (KN) 68.3%, bzw. $[a_2, b_2]$ zum KN 95.4%.

Wenngleich nicht alle Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ innerhalb einer Standardabweichung mit der jeweiligen Hypothesen verträglich sind, enthalten doch alle Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ den Wert \tilde{d}_{hyp} . Um eine Aussage darüber treffen zu können, wie gut die jeweils approximativ aus den Pseudoexperimenten bestimmten Unsicherheiten σ_{\pm} mit der Standardabweichung der wahren Verteilung $g(\hat{d}; \tilde{d})$ der Schätzer übereinstimmt, wird der Anteil $r_{1,2}$ der durch den Zusammenhang (82) definierten Konfidenzintervalle berechnet, welche \tilde{d}_{hyp} enthalten. r_1 bezeichnet hierbei den Anteil der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3% und r_2 den Anteil der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 95.4%, welche \tilde{d}_{hyp} enthalten. In Anlehnung an die in Abschnitt 5.2.1 erläuterte Interpretation des Konfidenzniveaus als Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Konfidenzintervalles, den wahren Wert abzudecken, wird $r_{1,2}$ im Folgenden als „beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit“ bezeichnet. Tabelle 4 zeigt die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten der aus den EML-Kurven bestimmten Konfidenzintervalle. Die Unsicherheit $s_{r_{1,2}}$ auf $r_{1,2}$ wird aus der Standardabweichung s_n der Binomialverteilung berechnet¹:

$$s_n = \sqrt{r_{1,2}N_0(1 - r_{1,2})} \quad (83)$$

$$\Rightarrow s_{r_{1,2}} = \frac{1}{N_0} \sqrt{r_{1,2}N_0(1 - r_{1,2})} = \sqrt{\frac{r_{1,2}(1 - r_{1,2})}{N_0}} \quad , \quad (84)$$

wobei $N_0 = 1700$ die Anzahl aller zur Parameterschätzung in Betracht gezogenen Pseudoexperimente ist.

	\tilde{d}_{hyp}	r_1		r_2	
\mathcal{O}	0.000	0.697	\pm 0.011	0.955	\pm 0.005
	0.200	0.524	\pm 0.012	0.866	\pm 0.008
	-0.050	0.693	\pm 0.011	0.958	\pm 0.005
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.670	\pm 0.011	0.949	\pm 0.005
	0.200	0.674	\pm 0.011	0.956	\pm 0.005
	-0.050	0.671	\pm 0.011	0.957	\pm 0.005

Tabelle 4: In 1700 Pseudoexperimenten beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_1 der aus den EML-Kurven bei der Anpassung an die Observablenverteilung bestimmten Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3%, sowie die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_2 zum Konfidenzniveau 95.4%.

¹Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, aus N_0 unabhängigen Experimenten mit zwei möglichen Resultaten („Erfolg“ oder „Misserfolg“) n -Mal „Erfolg“ zu erhalten und hat die Varianz $pN_0(1 - p)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit für einen „Erfolg“ ist [48].

Die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten stimmen innerhalb von ein bis zwei Standardabweichungen mit den zugehörigen Konfidenzniveaus überein. Lediglich die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten der aus der $\mathcal{O}\mathcal{O}$ -Verteilung für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ bestimmten Intervalle weichen deutlich von den jeweiligen Konfidenzniveaus ab.

8.2 Maximum-Likelihood-Anpassung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl

Zur Bestimmung von Schätzern \hat{d} aus den Verteilungen von $\mathcal{O}\mathcal{O}$ und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ kann, wie in Abschnitt 6.1 erläutert, die Theorievorhersage für jedes \tilde{d} auf die Stichprobe normiert werden, sodass die vorhergesagte Anzahl der Ereignisse konstant gehalten wird. Dadurch wird bei der Anpassung ausschließlich die Form der beobachteten Observablenverteilung berücksichtigt und nicht, wie in der EML-Anpassung, auch die gesamte Ereignisanzahl. Wie zuvor in Abschnitt 8.1 wird auch hier zunächst die theoretisch erwartete Verteilung für verschiedene \tilde{d}_{hyp} als Beobachtung angenommen, um die erwartete Form der Likelihoodkurven untersuchen zu können. Die so erhaltenen Kurven werden im Folgenden als NLL-Kurven bezeichnet. Zu jeder betrachteten Hypothese \tilde{d}_{hyp} wird eine Gesamtanzahl von $N = 200$ beobachteten Ereignissen angenommen, auf welche die Theorievorhersage für die Verteilung zu jedem $\tilde{d} \in [-1, 1]$ normiert wird. Die so erhaltenen NLL-Kurven sind in Abbildung 33 dargestellt. Man erkennt ein Abflachen der Kurven für große Werte von \tilde{d} . Außerdem sind die NLL-Kurven mit wachsendem $|\tilde{d}_{\text{hyp}}|$ zunehmend asymmetrisch. Abbildung 34 zeigt zur Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen relevanten Bereich um die Minima. Hier zeigt sich eine parabolische Form der NLL-Kurven für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$. Die NLL-Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ weist hingegen auch um ihr Minimum eine deutliche Asymmetrie auf. Daher ist für das zugehörige Konfidenzintervall ebenfalls eine Asymmetrie um \hat{d} zu erwarten. Die Ergebnisse für die Schätzer \hat{d} und die Unsicherheiten σ_{\pm} sind in Tabelle 5 zu finden. Alle bestimmten Schätzer \hat{d} sind innerhalb der bestimmten Unsicherheiten σ_{\pm} mit den jeweiligen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} verträglich. Weiterhin wird beobachtet, dass die Unsicherheiten mit wachsendem $|\tilde{d}_{\text{hyp}}|$ größer werden.

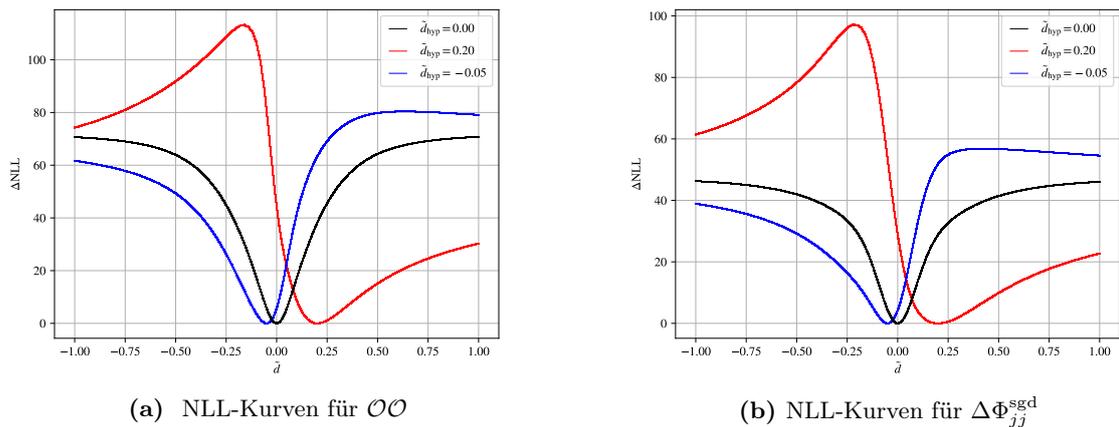
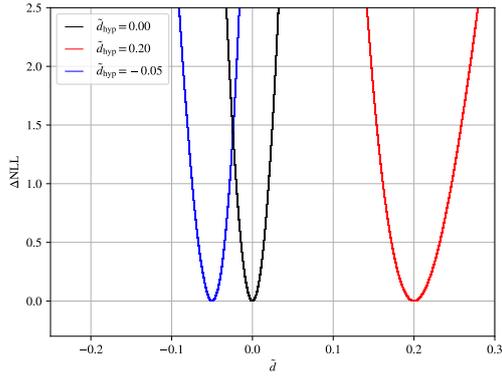
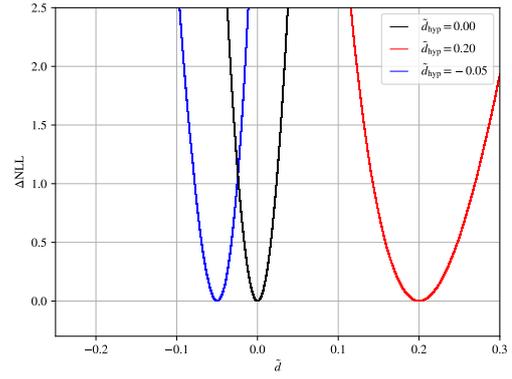


Abbildung 33: NLL-Kurven der Modellanpassung an die Observablenverteilung.



(a) NLL-Kurven für $\mathcal{O}\mathcal{O}$



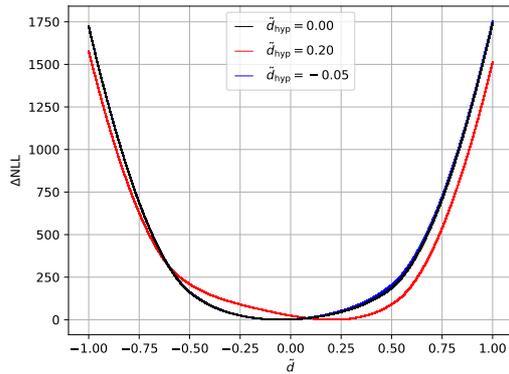
(b) NLL-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 34: Bereich um die Minima der NLL-Kurven

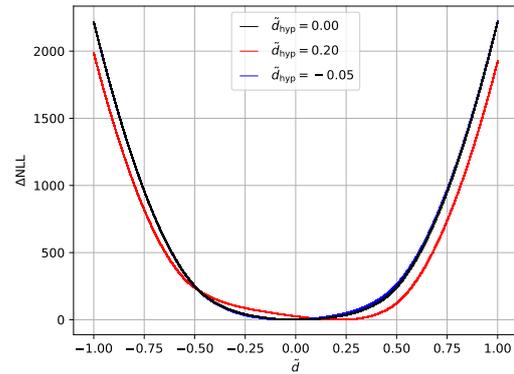
	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_-	σ_+	σ_-	σ_+
$\mathcal{O}\mathcal{O}$	0.000	0.000	0.014	0.014	0.029	0.029
	0.200	0.200	0.028	0.032	0.053	0.069
	-0.050	-0.050	0.017	0.016	0.036	0.030
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.000	0.016	0.016	0.033	0.033
	0.200	0.200	0.041	0.048	0.077	0.102
	-0.050	-0.050	0.019	0.018	0.041	0.035

Tabelle 5: Aus der ML-Anpassung an die Observablenverteilung bestimmte Schätzer \hat{d} und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4%

8.3 Erweiterte Maximum-Likelihood-Methode unter Berücksichtigung eines Untergrundes



(a) EML-Kurven für $\mathcal{O}\mathcal{O}$



(b) EML-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 35: EML-Kurven der die Modellanpassung an die Observablenverteilung für $r_b = 2.0$

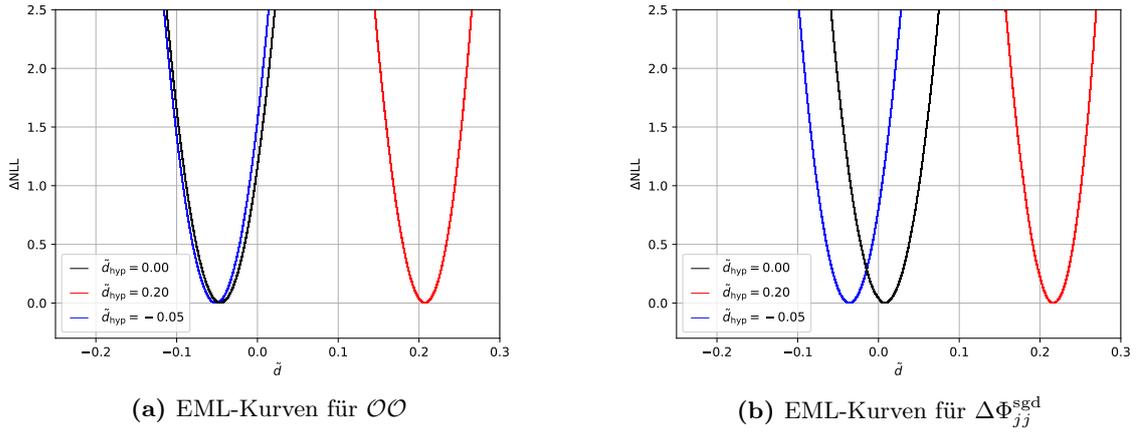


Abbildung 36: Bereich um die Minima der EML-Kurven

Der Einfluss eines CP-invarianten Untergrundes auf die Bestimmung von \tilde{d} durch die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung von \mathcal{O} bzw. $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ wird nun anhand eines Beispiels untersucht. Als Beobachtung wird die theoretisch erwartete Verteilung für verschiedene Hypothesen \tilde{d}_{hyp} angenommen. Zusätzlich wird gemäß der in Abschnitt 4.3 gegebenen Methode ein in jedem Bin um eine Konstante $b = \frac{r_b N_{\text{SM}}}{r_{\text{Bins}}}$ poissonverteilter Untergrund generiert. Hierbei ist N_{SM} die Anzahl der im Standardmodell erwarteten Ereignisse für das Signal der Higgs-Bosonproduktion in Vektorbosonfusion und r_b ein hypothetisch angenommenes Untergrund/Signalverhältnis. Im hier betrachteten Beispiel wird $r_b = 2.0$ angenommen. Der Untergrund wird, wie in Abschnitt 5.4 erläutert wurde, durch einen zusätzlichen Parameter b berücksichtigt. Dann werden, wie Abschnitt 5.3 erläutert, Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und zugehörige Unsicherheiten σ_{\pm} aus der Profillikelihoodfunktion bestimmt. Abbildung 35 zeigt den erwarteten Verlauf der Profillikelihoodfunktion. In diesem Abschnitt wird die Profillikelihoodfunktion, wie bereits in Abschnitt 8.1, als EML-Kurve bezeichnet. In Abbildung 36 ist der Bereich um die Minima der EML-Kurven dargestellt.

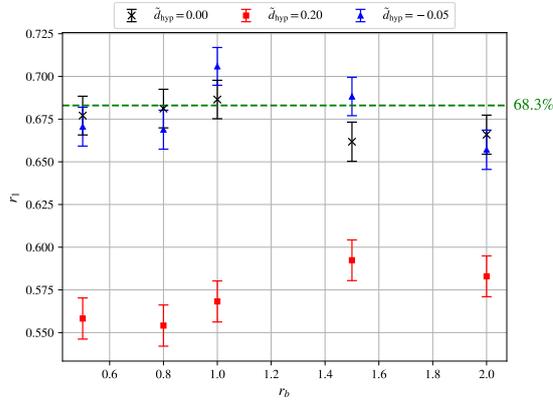
Im Vergleich zu den in Abschnitt 8.1 betrachteten EML-Kurven ohne Untergrund ist zu erkennen, dass die EML-Kurven mit Untergrund insgesamt weniger stark mit $|\tilde{d}|$ anwachsen. Auffällig ist auch, dass die Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ eine gegenüber dem Fall ohne Untergrund eine stark veränderte Form aufweist. Die in Abbildung 30 beobachtete Abweichung der EML-Kurve von einem parabolischen Verlauf hin zu kleineren Werten im Bereich um $\tilde{d} = -0.20$ ist nun stärker ausgeprägt. Die Ergebnisse für die jeweils aus den EML-Kurven bestimmten Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ sowie die Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% sind in Tabelle 6 aufgeführt.

	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_-	σ_+	σ_-	σ_+
\mathcal{OO}	0.000	-0.046	0.030	0.030	0.059	0.060
	0.200	0.207	0.027	0.026	0.055	0.052
	-0.050	-0.051	0.029	0.029	0.058	0.058
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.008	0.030	0.030	0.060	0.060
	0.200	0.216	0.025	0.025	0.052	0.048
	-0.050	-0.036	0.028	0.028	0.056	0.057

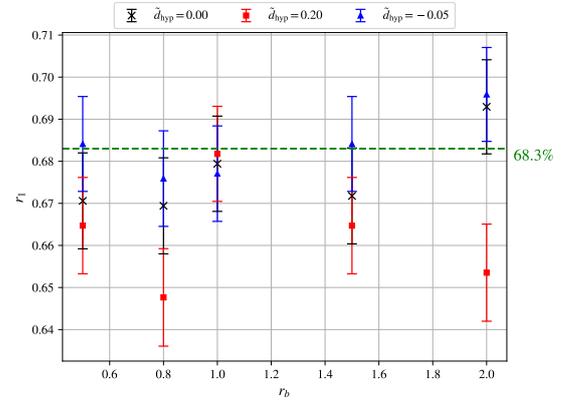
Tabelle 6: Aus der EML-Anpassung an die Observablenverteilung bestimmte Schätzer \hat{d} und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4% für ein Untergrund/Signalverhältnis $r_b = 2.0$

Die Schätzer \hat{d} stimmen fast alle innerhalb der Unsicherheiten σ_{\pm} mit den jeweiligen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} überein. Lediglich der aus der \mathcal{OO} -Verteilung ermittelte Schätzer für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ ist nur innerhalb der Unsicherheit zum Konfidenzniveau 95.4% mit \tilde{d}_{hyp} verträglich, nicht jedoch innerhalb der Unsicherheit zum Konfidenzniveau 68.3%. Statistische Fluktuationen des Untergrundes könnten eine Erklärung für diese Abweichung sein. Es kann anhand einer einzelnen Beobachtung allerdings nicht ausgeschlossen werden, dass der Untergrund in der Berechnung der Profillikelihoodfunktion mit unzureichender Genauigkeit abgeschätzt wurde. Die Betrachtung einer einzelnen Stichprobe ermöglicht es nicht, diesen Erklärungsansatz auszuschließen. Um genauere Aussagen treffen zu können, wird analog zu Abschnitt 8.1 die Verteilung der Schätzer \hat{d} aus 1700 Pseudoexperimenten untersucht. Dabei werden verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b angenommen. Aus den so erhaltenen Verteilungen werden die Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ bestimmt. Weiterhin werden aus den entsprechenden Quantilen der jeweiligen \hat{d} -Verteilung Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% und $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% bestimmt. Außerdem wird die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit $r_{1,2}$ zu den aus den einzelnen Pseudoexperimenten bestimmten Konfidenzintervallen bestimmt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Anhang A tabelliert. Abbildung 37 zeigt die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten r_1 der jeweils aus den Pseudoexperimenten bestimmten Konfidenzintervalle. Die Fehlerbalken zeigen die aus Gleichung 84 berechneten Unsicherheiten. Die grüne Linie zeigt das Konfidenzniveau an, welches per Konstruktion die erwartete Abdeckwahrscheinlichkeit darstellt. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ sind die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten weitgehend innerhalb einer Standardabweichung mit dem Konfidenzniveau verträglich. Dass nicht alle Werte innerhalb einer Standardabweichung mit der erwarteten Abdeckwahrscheinlichkeit übereinstimmen, ist zu erwarten, da auch die mit Gleichung 84 berechnete Standardabweichung einem Konfidenzintervall von 68.3% entspricht. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ sind die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten nicht mit dem Konfidenzniveau verträglich. In Abbildung 38 sind die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten r_2 im Vergleich zum zugehörigen Konfidenzniveau von 95.4% dargestellt. Für die aus der \mathcal{OO} -Verteilung erhaltenen Ergebnisse (Abbildung 38a) erhält man ein ähnliches Ergebnis wie für r_1 . Wieder zeigen die zu den Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ berechneten Werte eine gute Übereinstimmung mit dem Konfidenzniveau, während die zu $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ berechneten Werte nicht mit dem Konfidenzniveau verträglich sind. Auffällig ist, dass für die aus der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung erhaltenen Ergebnisse neben $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ auch die Werte für die Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ gut mit dem Konfidenzniveau verträglich sind. Betrachtet man alle vier in den Abbildungen 37 und 38 dargestellten Diagramme, so lässt sich keine Abhängigkeit der beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten von r_b erkennen. Vielmehr scheint hier \tilde{d}_{hyp} eine entscheidende Rolle zu spielen. Es wird außerdem klar, dass die approximative Bestimmung der

Konfidenzintervalle in der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Observablenverteilungen von $\mathcal{O}\mathcal{O}$ und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ Ergebnisse liefert, deren beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit für kleine $|\tilde{d}|$ -Werte gut mit dem zugehörigen Konfidenzniveau übereinstimmt.

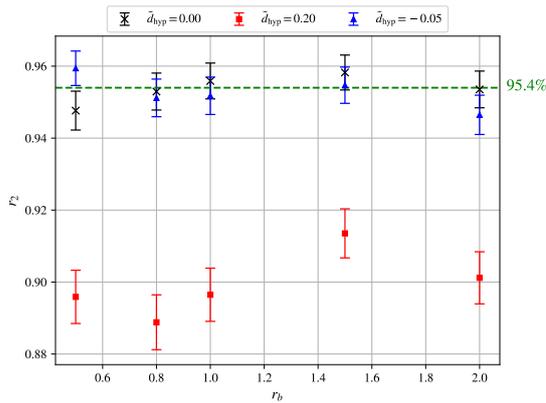


(a) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die $\mathcal{O}\mathcal{O}$ -Verteilung

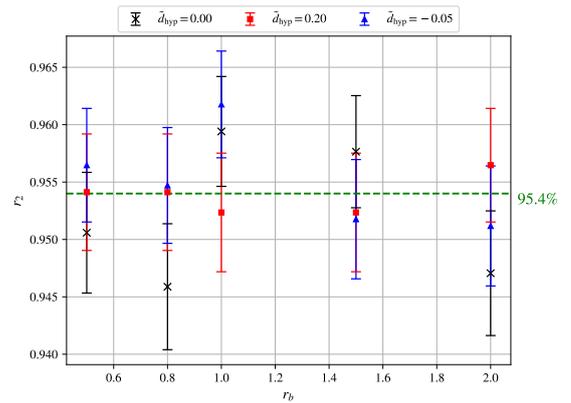


(b) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung

Abbildung 37: Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten r_1 für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b aus je 1700 Pseudoexperimenten



(a) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die $\mathcal{O}\mathcal{O}$ -Verteilung



(b) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung

Abbildung 38: Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten r_2 für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b aus je 1700 Pseudoexperimenten

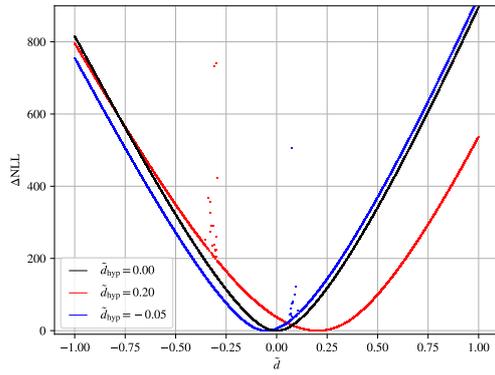
9 Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dargelegt, welche sich aus der Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der CP-ungeraden Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ ergeben. Der Aufbau des Kapitels gestaltet sich analog zu Kapitel 8. In Abschnitt 9.1 wird die erweiterte Maximum-Likelihood-Methode untersucht, in der die Abhängigkeit der Gesamtanzahl $N(\lambda^+)$ der erwarteten Ereignisse explizit ausgenutzt wird. In Abschnitt 9.2 wird die erwartete Form der Likelihoodkurven der Maximum-Likelihood-Methode untersucht, wobei die Gesamtanzahl N der in der Theorievorhersage erwarteten Ereignisse konstant gehalten wird. Abschnitt 9.3 befasst sich mit dem Einfluss eines CP-invarianten Untergrundes auf die Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen mit einer erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung. Alle Berechnungen wurden analog zu Kapitel 8 durchgeführt, mit der Ausnahme, dass zur Maximum-Likelihood-Anpassung die Skellam-Likelihoodfunktion verwendet wird (siehe Abschnitt 6.2). Daher beschränkt sich dieses Kapitel weitestgehend auf die Beschreibung der Resultate, welche bei der Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen an die Asymmetrie der Observablenverteilung erhalten wurden.

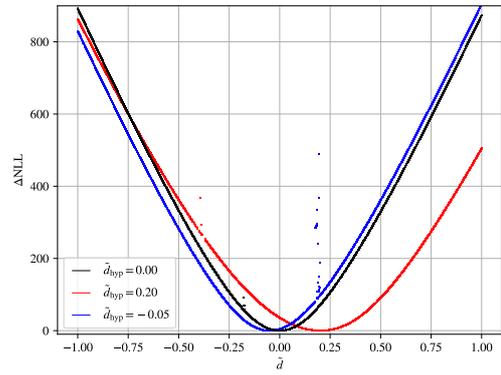
9.1 Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung

Die erwarteten EML-Kurven für die Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ sind in Abbildung 39 dargestellt. Dabei wurde, wie bereits in Kapitel 8, als die theoretisch erwartete Verteilung für die verschiedenen Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ als Beobachtung angenommen. Für alle betrachteten \tilde{d} -Hypothesen ist ein symmetrischer Verlauf der Kurven um ihr jeweiliges Minimum zu erkennen. Die bei der Anpassung an die volle Verteilung in Abbildung 30 beobachtete Abweichung der für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ erhaltenen Kurve im Bereich um $\tilde{d} \approx -0.20$ ist hier nicht zu sehen, denn $N(\lambda^+)$ hängt nicht von \tilde{d} ab. Es lassen sich weiterhin Unstetigkeiten in den EML-Kurven erkennen. Neben einzelnen Ausreißern sind auch Lücken zu sehen. Die Lücken sind Stellen, an denen der zur Berechnung der Profillikelihood verwendete, gradientenbasierte Algorithmus nicht konvergiert. Der Grund dafür sind vermutlich Regionen im Parameterraum, an denen die Skellam-Likelihoodfunktion nicht stetig differenzierbar ist¹. Im für die Bestimmung der Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und der zugehörigen Konfidenzintervalle relevanten Bereich um das Minimum der Profillikelihoodfunktion wurden solche Lücken oder Unstetigkeiten jedoch nicht festgestellt. In Abbildung 40, welche den Bereich um die Minima der EML-Kurven zeigt, ist dies gut erkennbar. Im Bereich um die Minima weisen die EML-Kurven zu allen drei \tilde{d} -Hypothesen einen parabolischen Verlauf auf. Die aus der Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilungen erhaltenen Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ sowie die zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% berechneten Unsicherheiten σ_{\pm} sind in Tabelle 7 gegeben.

¹Die Skellam-Likelihoodfunktion (Gleichung 60) ist durch die in Abschnitt 5.5 erläuterte Einführung von Beträgen nicht überall stetig differenzierbar.

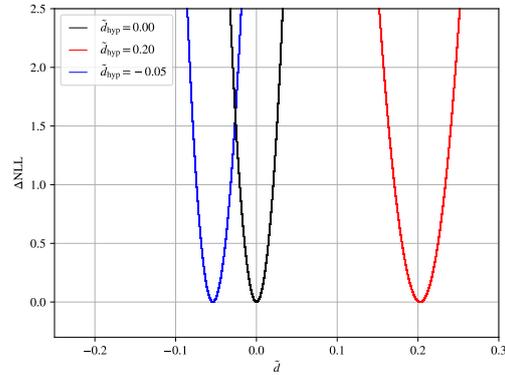


(a) EML-Kurven für \mathcal{O}

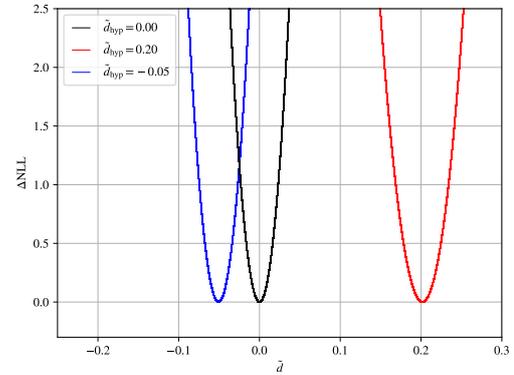


(b) EML-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 39: EML-Kurven der Modellanpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung



(a) EML-Kurven für \mathcal{O}



(b) EML-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

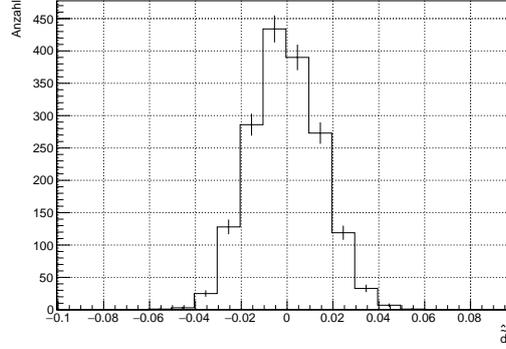
Abbildung 40: Bereich um die Minima der EML-Kurven

	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_-	σ_+	σ_-	σ_+
\mathcal{O}	0.000	0.000	0.015	0.015	0.029	0.029
	0.200	0.203	0.023	0.022	0.045	0.044
	-0.050	-0.054	0.014	0.016	0.028	0.031
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.000	0.016	0.016	0.033	0.033
	0.200	0.202	0.023	0.023	0.047	0.046
	-0.050	-0.051	0.017	0.017	0.033	0.034

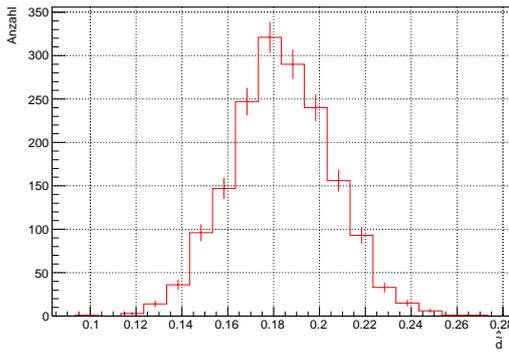
Tabelle 7: Aus der EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmte Schätzer \hat{d} und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4% ohne Untergrund

Innerhalb der Unsicherheiten σ_{\pm} stimmen alle Schätzer \hat{d} mit den jeweiligen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} überein. Die Unsicherheiten zum Konfidenzniveau 95.4% sind, durch die parabolische Form der EML-Kurven bedingt, doppelt so groß wie die Unsicherheiten zum Konfidenzniveau 68.3%.

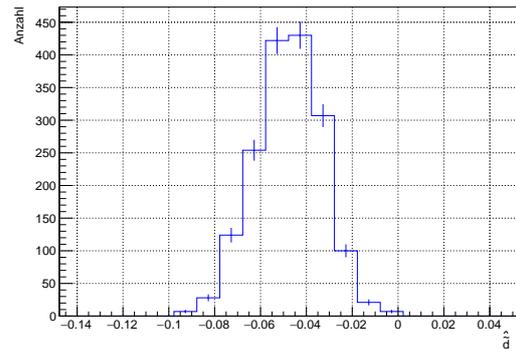
Die Unsicherheiten σ_{\pm} zu beiden betrachteten Konfidenzniveaus, welche aus der Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung bestimmt wurden, sind größer als die aus der Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Konfidenzintervalle. Um die Verteilung der Schätzer \hat{d} genauer zu untersuchen, wird die Anpassung an die Asymmetrie der Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ für 1700 Pseudoexperimente vorgenommen. Die damit erhaltenen Verteilungen der Schätzer zu den drei verschiedenen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} sind in Abbildung 41 beispielhaft anhand der für \mathcal{OO} erhaltenen Verteilungen dargestellt.



(a) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$



(b) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$



(c) Verteilung von \hat{d} für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$

Abbildung 41: Verteilung der aus der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Schätzer \hat{d} aus 1700 Pseudoexperimenten

Die Verteilung für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ hat eine annähernd um $\hat{d} = 0$ symmetrische Form. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ scheint die Verteilung ebenfalls annähernd symmetrisch um den als Hypothese angenommenen Wert zu sein. An der Verteilung für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ fällt auf, dass sie offenbar breiter als die \hat{d} -Verteilungen zu den beiden anderen Hypothesen ist und dass sie außerdem nicht um $\hat{d} = 0.20$ zentriert ist. Zu den Verteilungen zu den verschiedenen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} werden die Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ berechnet. Außerdem wird aus den entsprechenden Quantilen der Verteilung zu jedem \tilde{d}_{hyp} jeweils ein Konfidenzintervall $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% bestimmt, sowie ein 95.4%-Konfidenzintervall $[a_2, b_2]$. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabelle 8 zusammengefasst. Für alle \tilde{d} -Hypothesen enthalten die Konfidenzintervalle $[a_{1,2}, b_{1,2}]$ den jeweiligen Wert \tilde{d}_{hyp} . Es bestätigt sich allerdings, was bereits bei der Betrachtung von Abbildung 41 auffiel, nämlich dass die Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ der aus der Asymmetrie der Observablenverteilungen erhaltenen Schätzern für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ nicht innerhalb der Standardabweichung

mit \tilde{d}_{hyp} verträglich sind. Auch für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ zeigt sich eine solche Abweichung für den Mittelwert aus der Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Schätzer. Für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ stimmt der Mittelwert innerhalb der doppelten Standardabweichung mit $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ überein. Unter der Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ sind die für \mathcal{OO} bestimmten Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ innerhalb der doppelten Standardabweichung mit \tilde{d}_{hyp} verträglich und die für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bestimmten Werte innerhalb der einfachen Standardabweichung.

	\tilde{d}_{hyp}	$\langle \hat{d} \rangle$	68.3% KN		95.4% KN	
			a_1	b_1	a_2	b_2
\mathcal{OO}	0.0000	-0.0005 ± 0.0004	-0.015	0.015	-0.029	0.030
	0.2000	0.1833 ± 0.0005	0.162	0.205	0.138	0.228
	-0.0500	-0.0478 ± 0.0004	-0.063	-0.033	-0.077	-0.020
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.0000	-0.0001 ± 0.0004	-0.017	0.016	-0.033	0.034
	0.2000	0.1975 ± 0.0006	0.175	0.220	0.151	0.246
	-0.0500	-0.0492 ± 0.0004	-0.066	-0.033	-0.082	-0.014

Tabelle 8: Aus den 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle \hat{d} \rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau (KN) 68.3% bzw. $[a_2, b_2]$ zum KN 95.4%.

Aus den zu den 1700 Pseudoexperimenten jeweils durch die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Verteilungen von \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bestimmten Konfidenzintervallen wird die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_1 der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3%, sowie die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_2 der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 95.4% berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 zusammengefasst. Fast alle beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten sind innerhalb einer Standardabweichung mit dem zugehörigen Konfidenzintervall verträglich. Lediglich bei den beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten $r_{1,2}$ der unter der Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ aus der Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Konfidenzintervalle wird eine deutliche Diskrepanz festgestellt. Im Gegensatz dazu sind die unter der selben Hypothese beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ innerhalb einer Standardabweichung mit den zugehörigen Konfidenzniveaus verträglich.

	\tilde{d}_{hyp}	r_1	r_2
\mathcal{OO}	0.000	0.682 ± 0.011	0.959 ± 0.005
	0.200	0.548 ± 0.012	0.869 ± 0.008
	-0.050	0.683 ± 0.011	0.959 ± 0.005
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.681 ± 0.011	0.954 ± 0.005
	0.200	0.682 ± 0.011	0.949 ± 0.005
	-0.050	0.679 ± 0.011	0.957 ± 0.005

Tabelle 9: In 1700 Pseudoexperimenten beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_1 der aus den EML-Kurven bei der Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmten Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3%, sowie die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_2 zum Konfidenzniveau 95.4%.

9.2 Maximum-Likelihood-Anpassung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl

Es wird nun die Bestimmung von \tilde{d} aus der Asymmetrie der Observablenverteilung nach Normierung auf die beobachtete Ereignisanzahl untersucht. Hierfür wird wieder, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten, die Form der erwarteten Likelihood-Kurven untersucht, indem die Theorievorhersage für verschiedene $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ als Beobachtung angenommen wird. Es wird dabei eine Beobachtung von 200 Ereignissen für jede Hypothese \tilde{d}_{hyp} angenommen. Für die nach Abschnitt 4.1 generierte, theoretisch erwartete Verteilung der Observablen \mathcal{O} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ für jedes $\tilde{d} \in [-1, 1]$, welche zur Maximum-Likelihood-Anpassung verwendet wird, wird die Anzahl der Ereignisse $N = 200$ konstant gehalten. Nach der so erfolgten Normierung auf 200 Ereignisse wird die Theorievorhersage für die Asymmetrie der Verteilung durch das in Abschnitt 5.5 erläuterte Verfahren berechnet. Die erwartete Form des negativen Logarithmus der Likelihoodfunktion (NLL) ist in Abbildung 42 zu sehen. Wie in Abschnitt 7.2 deutlich wurde, verändert die Normierung der theoretisch vorhergesagten Verteilung auf eine konstante Ereignisanzahl die \tilde{d} -Abhängigkeit der Observablenverteilung. Insbesondere die nichtlineare Abhängigkeit der Asymmetrie der Observablenverteilung von \tilde{d} nach Normierung der erwarteten Ereignisanzahl auf $N = \text{const.}$ wirkt sich stark auf die aus der Modellanpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung erhaltene NLL-Kurve aus. Die erwarteten Likelihoodkurven in Abbildung 42 ermöglichen keine genaue Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen. Die NLL-Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ besitzt einen ausgedehnten Bereich um ihr Minimum, in der der Likelihoodwert nahezu konstant bleibt. Dadurch wird auch das aus der Kurve bestimmte Konfidenzintervall sehr groß. Die NLL-Kurve für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ nähert sich für $\tilde{d} \rightarrow -1$ sogar wieder dem Wert 0. Der Grund für die schlechten Eigenschaften der Likelihoodfunktion nach Normierung auf eine feste Ereignisanzahl liegt in der in Abschnitt 7.2 diskutierten Mehrdeutigkeit der \tilde{d} -Werte zu den in den einzelnen Bins beobachteten Differenzen. Dies wirkt sich insofern auf die Likelihoodfunktion aus, dass sich beispielsweise bei den in Abschnitt 7.2 diskutierten kleinen Änderungen von \tilde{d} um $\tilde{d} \approx 0.25$ annähernd konstante Likelihoodwerte ergeben. Die Ergebnisse für die aus den NLL-Kurven erhaltenen Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ sowie die Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% sind in Tabelle 10 enthalten.

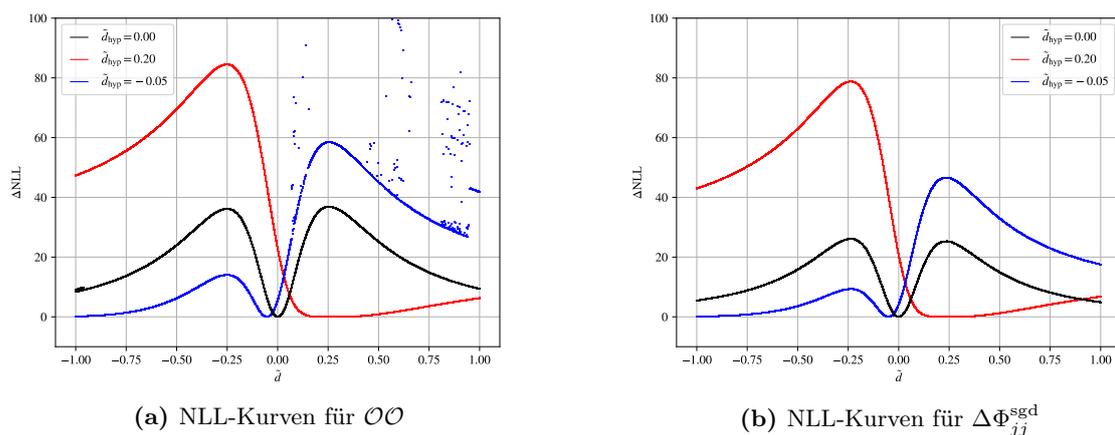


Abbildung 42: NLL-Kurven der Modellanpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung

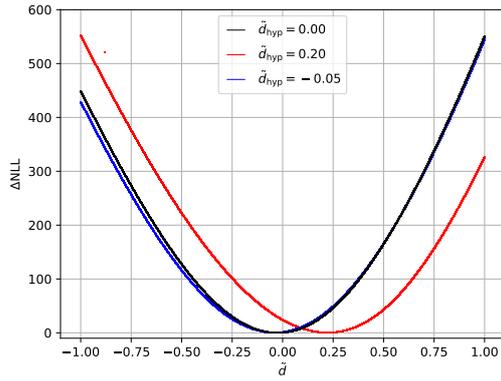
	\tilde{d}_{hyp}	$\hat{\tilde{d}}$	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_-	σ_+	σ_-	σ_+
\mathcal{OO}	0.000	0.000	0.015	0.015	0.030	0.030
	0.200	0.232	0.090	0.221	0.127	0.382
	-0.050	-0.054	0.017	0.017	0.035	0.033
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	0.000	0.016	0.016	0.033	0.034
	0.200	0.238	0.107	0.180	0.142	0.334
	-0.050	-0.051	0.020	0.018	0.043	0.036

Tabelle 10: Aus der ML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmte Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4% ohne Untergrund

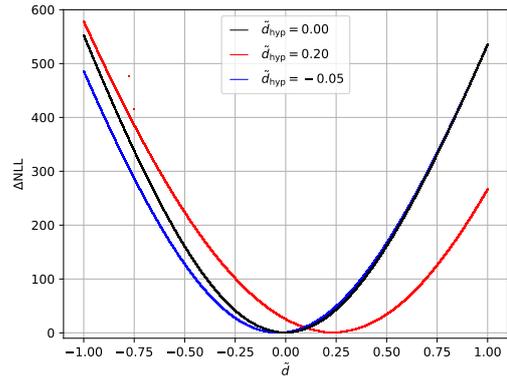
Die Ergebnisse in Tabelle 10 bestätigen, dass für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ eine genaue Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen nicht möglich ist. Die Unsicherheiten zum Konfidenzniveau 95.4% sind asymmetrisch gegenüber den 68.3%-Unsicherheiten vergrößert. Für die Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ ergeben sich hingegen symmetrische Unsicherheiten, wobei 95.4%-Unsicherheiten doppelt so groß sind wie die 68.3%-Unsicherheiten. Dies spricht für einen parabolischen Verlauf der NLL-Kurve um ihr Minimum. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ ist diese Verhalten für die aus der Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung bestimmten Schätzer näherungsweise ebenfalls gegeben. Für die aus der Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung bestimmten Schätzer ist bei Betrachtung der Unsicherheiten σ_- bereits eine Abweichung von einem solchen Verlauf zu erkennen. Weiterhin wird beobachtet, dass die für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhaltenen Unsicherheiten unter den Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ etwas größer sind als für \mathcal{OO} .

9.3 Erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung unter Berücksichtigung eines Untergrundes

In diesem Abschnitt wird, analog zur in Abschnitt 8.3 diskutierten erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Observablenverteilung, der Einfluss eines CP-invarianten Untergrundes auf die Bestimmung von \tilde{d} untersucht. Dabei wird nun die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Verteilung von \mathcal{OO} bzw. $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ verwendet. Es wird die jeweils theoretisch erwartete Verteilung für die drei betrachteten Hypothesen \tilde{d}_{hyp} als Beobachtung angenommen. Zusätzlich wird durch die in Abschnitt 4.3 gegebene Methode ein Untergrund generiert, welcher in jedem Bin der als Beobachtung angenommenen Observablenverteilung um die Konstante $b = \frac{r_b N_{\text{SM}}}{n_{\text{Bins}}}$ poissonverteilt ist. Um ein Beispiel für die zu erwartende Form der Profillikelihoodkurven der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung (EML-Kurven) zu erhalten, wird ein Untergrund/Signalverhältnis $r_b = 2.0$ angenommen. Abbildung 43 zeigt die erwartete Form der EML-Kurven für die verschiedenen Hypothesen \tilde{d}_{hyp} . Abbildung 44 zeigt den für die Bestimmung von Schätzern und Konfidenzintervallen relevanten Bereich um die Minima der Kurven. Es wird ein parabolischer Verlauf der EML-Kurven festgestellt. Im Vergleich zu den in Abschnitt 9.1 betrachteten EML-Kurven ohne Berücksichtigung eines Untergrundes insgesamt eine Abflachung der Kurven hin zu kleineren Likelihoodwerten zu erkennen. Im Gegensatz zur EML-Kurve ohne Untergrund sind in Abbildung 43 keine Ausreißer, Lücken oder Unstetigkeiten erkennbar. Tabelle 11 zeigt die Ergebnisse für die durch die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung erhaltenen Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ sowie die Unsicherheiten σ_{\pm} zu den beiden Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4%.

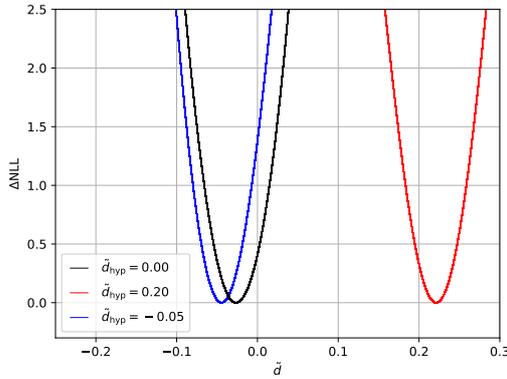


(a) EML-Kurven für \mathcal{O}

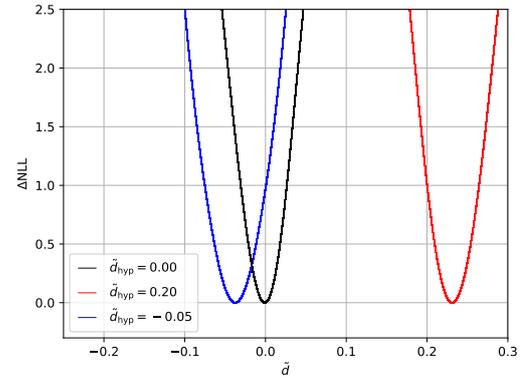


(b) EML-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 43: EML-Kurven der Modellanpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung für $r_b = 2.0$



(a) EML-Kurven für \mathcal{O}



(b) EML-Kurven für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 44: Bereich um die Minima der EML-Kurven

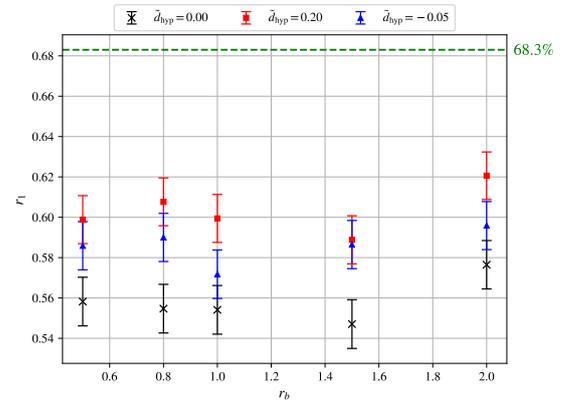
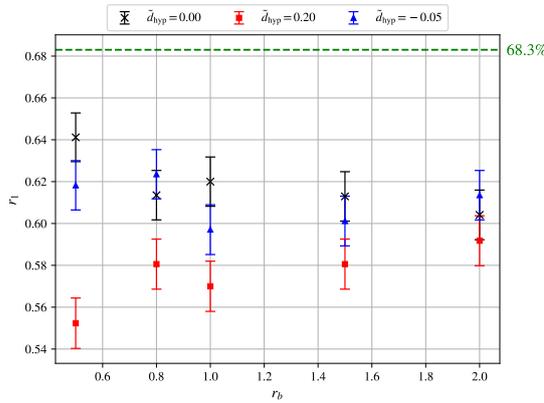
	\tilde{d}_{hyp}	$\hat{\tilde{d}}$	68.3% KN		95.4% KN	
			σ_-	σ_+	σ_-	σ_+
\mathcal{O}	0.000	-0.026	0.028	0.029	0.056	0.058
	0.200	0.221	0.026	0.026	0.055	0.054
	-0.050	-0.045	0.025	0.026	0.050	0.055
$\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$	0.000	-0.001	0.020	0.019	0.045	0.041
	0.200	0.231	0.022	0.023	0.046	0.049
	-0.050	-0.038	0.026	0.026	0.055	0.056

Tabelle 11: Aus der EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmte Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und Unsicherheiten σ_{\pm} zu den Konfidenzniveaus (KN) 68.3% und 95.4% für ein Untergrund/Signalverhältnis $r_b = 2.0$

Anhand der Ergebnisse in Tabelle 11 wird festgestellt, dass auf für beide Konfidenzniveaus

alle bestimmten Schätzer \hat{d} innerhalb der Unsicherheiten σ_{\pm} mit der jeweils als Beobachtung angenommenen Hypothese \tilde{d}_{hyp} verträglich sind.

Die erweiterte Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung wurde zu verschiedenen Untergrund/Signalverhältnissen r_b für je 1700 Pseudoexperimente durchgeführt. Es wurde zu jedem r_b jeweils die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_1 der aus den Pseudoexperimenten bestimmten 68.3%-Konfidenzintervalle bestimmt, sowie die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit r_2 der 95.4%-Konfidenzintervalle. Die vollständigen Ergebnisse für die zu den verschiedenen r_b beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten, sowie für die Mittelwerte $\langle \hat{d} \rangle$ der jeweils erhaltenen Verteilung der zu den Pseudoexperimenten bestimmten Schätzer \hat{d} und die aus den entsprechenden Quantilen der Verteilung bestimmten Konfidenzintervalle $[a_{1,2}, b_{1,2}]$ sind in Anhang A tabelliert.



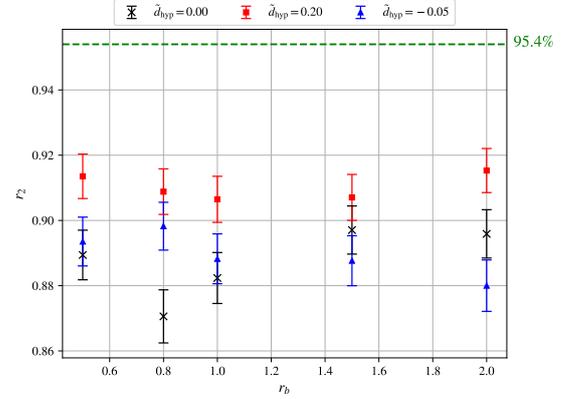
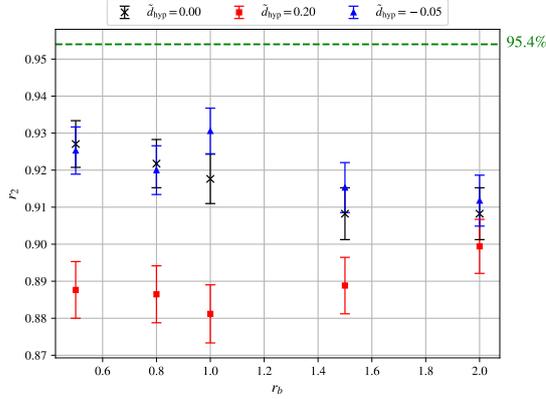
(a) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung

(b) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung

Abbildung 45: Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten r_1 für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b aus je 1700 Pseudoexperimenten

Die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten r_1 der 68.3%-Konfidenzintervalle sind in Abbildung 45 im Vergleich zum Konfidenzniveau dargestellt. Weder für die aus der Anpassung an die Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung, noch für die aus der Anpassung an die Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung erhaltenen Ergebnisse sind die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten mit dem Konfidenzniveau 68.3% verträglich. Es zeigt sich vielmehr eine systematische Abweichung hin zu niedrigeren Werten. Für die anhand der Anpassung an die Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung erhaltenen Werte von r_1 ist die systematische Abweichung für die Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ im Rahmen der jeweiligen Unsicherheit etwa gleich groß, für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ ist eine stärkere Abweichung erkennbar. Für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ verhält es sich umgekehrt. Hier ist die systematische Abweichung unter der Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ offenbar am größten und für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ am geringsten. Abbildung 46 zeigt die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten r_2 zum Konfidenzniveau 95.4% der jeweils aus den Pseudoexperimenten bestimmten Konfidenzintervalle für verschiedene Untergrund/Signalverhältnissen r_b im Vergleich zum Konfidenzniveau. Auch hier sind die erhaltenen Werte nicht mit dem Konfidenzniveau verträglich. Weiterhin verhält sich die Abweichung der beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten vom Konfidenzniveau analog zu den für r_1 beobachteten Abweichungen. Die aus der Anpassung an die Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung erhaltenen Werte unter der Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ zeigen eine größere Abweichung als die unter den Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$

erhaltenen Abweichungen. Die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ stimmen innerhalb ihrer jeweiligen Unsicherheiten weitestgehend überein. Die für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten zeigen auch für das Konfidenzniveau 95.4% eine geringere Abweichung der unter der Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ erhaltenen Werte als die unter den beiden anderen Hypothesen beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten.



(a) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die \mathcal{O} -Verteilung

(b) Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten der Anpassung an die $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung

Abbildung 46: Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten r_2 für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b aus je 1700 Pseudoexperimenten

10 Bestimmung von \tilde{d} aus dem Mittelwert der Observablenverteilung

Zur Bestimmung von \tilde{d} und zugehörigen Konfidenzintervallen aus dem Mittelwert der Observablenverteilung wird die in Abschnitt 6.3 erläuterte Eichkurve der Observablenmittelwerte verwendet. Für die Berechnung der Eichkurve wurden für \tilde{d} -Werte im Abstand von 0.001 aus den zu 1700 Pseudoexperimenten jeweils erhaltenen Histogrammen der Observablenverteilung die jeweiligen Mittelwerte berechnet. Dabei wurde zu jedem \tilde{d} die Verteilung der aus den Pseudoexperimenten bestimmten Observablenmittelwerte verwendet, um aus den entsprechenden Quantilen die Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% zu berechnen. Die gesamte Menge der so bestimmten Konfidenzintervalle zu allen \tilde{d} -Hypothesen ergibt das Konfidenzband zum jeweiligen Konfidenzniveau. Es wurde hierbei kein Untergrund berücksichtigt. Zwischen den diskreten Punkten der Eichkurve und der Konfidenzbänder im Abstand von 0.001 wurde bei der Bestimmung von Schätzern $\hat{\tilde{d}}$ und zugehörigen Konfidenzintervallen linear interpoliert. Abbildung 47 zeigt die für die Mittelwerte der \mathcal{OO} -Verteilung erhaltene Eichkurve mit den entsprechenden Konfidenzbändern zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4%. Sie entspricht dem in Abschnitt 6.3 erläuterten erwarteten Verlauf.

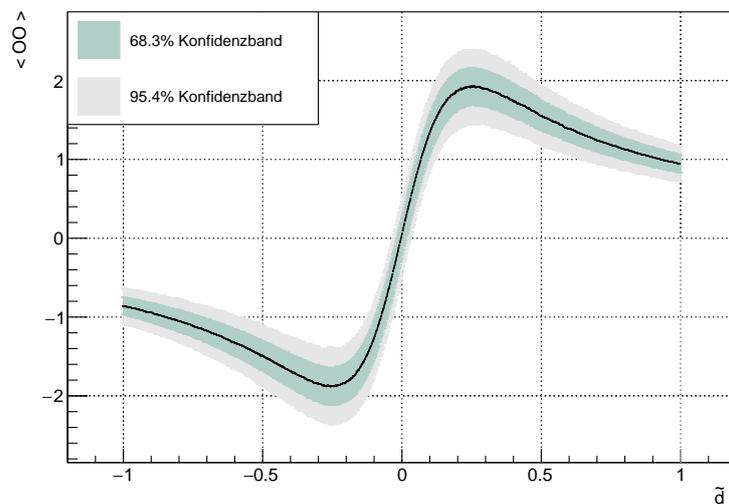


Abbildung 47: Eichkurve der Mittelwerte der \mathcal{OO} -Verteilung mit Konfidenzbändern zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4%. Für die Bestimmung der Werte in Tabelle 12 wurde nur der Bereich zwischen den Extrema der Eichkurve berücksichtigt.

Als Beobachtung wurde zu den drei verschiedenen \tilde{d} -Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ die theoretisch erwartete Verteilung angenommen und aus dem zugehörigen Histogramm jeweils der Mittelwert $\langle \mathcal{OO} \rangle_{\text{hyp}}$ berechnet. Zur Bestimmung von Schätzern $\hat{\tilde{d}}$ sowie Konfidenzintervallen $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% und Konfidenzintervallen $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% wurde nur der Bereich zwischen den beiden Extrema der Eichkurve bei $|\tilde{d}| \approx 0.25$

berücksichtigt, da sonst keine eindeutige Bestimmung von Schätzern möglich ist. Die Ergebnisse für $\langle \mathcal{OO} \rangle_{\text{hyp}}$, \hat{d} und $[a_{1,2}, b_{1,2}]$ sind in Tabelle 12 aufgeführt.

\tilde{d}_{hyp}	$\langle \mathcal{OO} \rangle_{\text{hyp}}$	\hat{d}	a_1	b_1	a_2	b_2
0.000	0.013 ± 0.005	0.000	-0.013	0.013	-0.028	0.029
0.200	1.871 ± 0.011	0.204	0.143	-	0.112	-
-0.050	-0.712 ± 0.005	-0.050	-0.067	-0.034	-0.086	-0.021

Tabelle 12: Für \mathcal{OO} aus der Eichkurve bestimmte Schätzer \hat{d} sowie aus dem Konfidenzgürtel bestimmte 68.3%-Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ und 95.4%-Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ für verschiedene Hypothesen \tilde{d}_{hyp} und die entsprechenden Mittelwerte $\langle \mathcal{OO} \rangle_{\text{hyp}}$ der erwarteten \mathcal{OO} -Verteilung.

Die für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ erhaltenen Konfidenzintervalle enthalten den jeweils zugehörigen \tilde{d}_{hyp} -Wert. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ wurden keine oberen Grenzen $b_{1,2}$ der Konfidenzintervalle bestimmt, da die Schnittpunkte der durch den Mittelwert $\langle \mathcal{OO} \rangle_{\text{hyp}} = 1.871$ definierten waagerechten Geraden mit dem jeweiligen rechten Rand der Konfidenzbänder außerhalb des hier betrachteten Bereiches zwischen den Extrema der Eichkurve liegt. Die Konfidenzintervalle für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ sind größer als diejenigen für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$.

Die Eichkurve der Mittelwerte der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung ist in Abbildung 48 mit den jeweiligen Konfidenzbändern zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4% dargestellt. Auch sie entspricht dem in Abschnitt 6.3 beschriebenen erwarteten Verlauf. Sie besitzt eine geringere Steigung und nimmt insgesamt kleinere Werte an als die Eichkurve der Mittelwerte der \mathcal{OO} -Verteilung. Die Extrema der Kurve befinden sich etwa bei $\tilde{d} \approx 0.2$. Die aus der Erwarteten $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung zu den jeweiligen \tilde{d} -Hypothesen \tilde{d}_{hyp} bestimmten Mittelwerte $\langle \Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle_{\text{hyp}}$, sowie die daraus anhand der Eichkurve bestimmten Schätzer \hat{d} und Konfidenzintervalle $[a_{1,2}, b_{1,2}]$ sind in Tabelle 13 zusammengefasst.

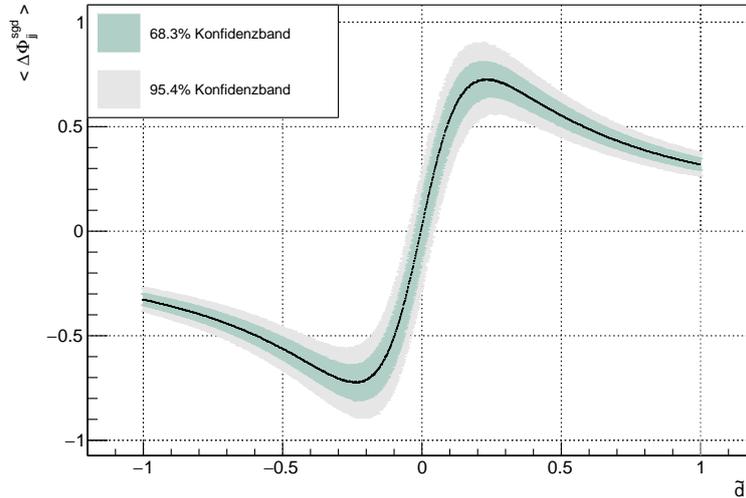


Abbildung 48: Eichkurve der Mittelwerte der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung mit Konfidenzbändern zu den Konfidenzniveaus 68.3% und 95.4%. Für die Bestimmung der Werte in Tabelle 13 wurde nur der Bereich zwischen den Extrema der Eichkurve berücksichtigt.

\tilde{d}_{hyp}	$\langle \Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle_{\text{hyp}}$	\hat{d}	a_1	b_1	a_2	b_2
0.000	0.010 ± 0.003	0.000	-0.021	0.022	-0.043	0.043
0.200	0.717 ± 0.005	0.201	0.128	-	0.089	-
-0.050	-0.285 ± 0.003	-0.050	-0.074	-0.027	-0.100	-0.007

Tabelle 13: Für $\Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ aus der Eichkurve bestimmte Schätzer \hat{d} sowie aus dem Konfidenzgürtel bestimmte 68.3%-Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ und 95.4%-Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ für verschiedene Hypothesen \tilde{d}_{hyp} und die entsprechenden Mittelwerte $\langle \Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle_{\text{hyp}}$ der erwarteten $\Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung.

Die der aus der Eichkurve der Mittelwerte $\langle \Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle$ bestimmten Konfidenzintervalle enthalten unter den Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ alle den jeweiligen Wert \tilde{d}_{hyp} . Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ wurden keine oberen Grenzen $b_{1,2}$ der Konfidenzintervalle bestimmt, da diese nicht innerhalb des betrachteten Bereiches zwischen den Extrema der Eichkurve liegen. Aufgrund des flacheren Verlaufes der Eichkurve der Mittelwerte $\langle \Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle$ gegenüber dem der $\langle \mathcal{O} \mathcal{O} \rangle$ -Eichkurve sind die unter den Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ bestimmten Konfidenzintervalle größer als die entsprechend aus der $\langle \mathcal{O} \mathcal{O} \rangle$ -Eichkurve bestimmten Intervalle. Zur unteren Grenze $a_{1,2}$ des jeweiligen Konfidenzintervalles lässt sich feststellen, dass sie für $\Delta \Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ einen größeren Abstand zu \hat{d} besitzt als für $\mathcal{O} \mathcal{O}$.

11 Vergleich der Methoden zur Bestimmung von \tilde{d}

In diesem Kapitel werden abschließend die wichtigsten Resultate der Kapitel 8, 9 und 10 zusammengefasst und verglichen. Dabei werden zunächst in Abschnitt 11.1 die zu den verschiedenen Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$ bestimmten Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% betrachtet. Auf die Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3% wird nicht nochmals eingegangen, denn im Vergleich der verschiedenen Methoden verhalten sich die 69.3%-Konfidenzintervalle analog zu den 95.4%-Konfidenzintervallen. Es werden dabei zum einen die Resultate nochmals dargelegt, die mittels der in Abschnitt 8.1 untersuchten erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Observablenverteilung erhalten wurden, zum anderen die Resultate aus der in Abschnitt 9.1 untersuchten erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung. Außerdem werden die Ergebnisse für die Bestimmung der Schätzer und Konfidenzintervalle aus dem Mittelwert der Observablenverteilung betrachtet. In Abschnitt 11.2 wird nochmals vergleichend auf die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten eingegangen. Diese ergeben sich für die aus den beiden erweiterten Maximum-Likelihood-Methoden bestimmten Konfidenzintervalle für 1700 generierte Pseudoexperimente.

11.1 Schätzer und Konfidenzintervalle

In diesem Abschnitt werden für verschiedene Hypothesen \tilde{d}_{hyp} die besten Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung der CP-ungeraden Observablen \mathcal{OO} und $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$, sowie an die Asymmetrie der Observablenverteilung, verglichen. Außerdem werden in diesem Vergleich die Schätzer, die unter Verwendung der Eichkurve der Observablenmittelwerte aus dem Mittelwert der Observablenverteilung bestimmt wurden, betrachtet.

Als bester Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ für die jeweilige erweiterte Maximum-Likelihood-Methode wird hier der Mittelwert $\langle \hat{\tilde{d}} \rangle$ aus der Verteilung der zu 1700 Pseudoexperimenten bestimmten Schätzer angenommen. Die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% wurden aus den entsprechenden Quantilen der Verteilung der Schätzer bestimmt. Die 95.4%-Konfidenzintervalle, die aus dem Mittelwert der erwarteten Observablenverteilung bestimmt wurden, wurden aus dem entsprechenden Konfidenzband bestimmt, welches ebenfalls aus Pseudoexperimenten berechnet wurde. Um die verschiedenen Methoden in übersichtlicher Darstellung vergleichen zu können, wird der jeweils beste Schätzer für die erweiterten Maximum-Likelihood-Methoden ohne seine statistische Unsicherheit angegeben und auf drei Nachkommastellen gerundet. Diese statistische Unsicherheit ist für den Test der CP-Invarianz nicht relevant. Ausschlaggebend ist hier vielmehr das Konfidenzintervall. Dieses aus Pseudoexperimenten bestimmte Intervall erlaubt einen sinnvollen Vergleich mit dem Konfidenzintervall, welches aus der Eichkurve der Observablenmittelwerte bestimmt wurde.

Tabelle 14 fasst die Ergebnisse für die besten Schätzer $\hat{\tilde{d}}$ und die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% zu den jeweils angenommenen Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} \in \{0.00, 0.20, -0.05\}$

unter Verwendung der optimalen Observable \mathcal{OO} zusammen. Bei den hier gezeigten Werten wurde kein Untergrund berücksichtigt.

	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	a_2	b_2
Verteilung	0.000	0.000	-0.028	0.029
	0.200	0.188	0.163	0.212
	-0.050	-0.049	-0.079	-0.020
Asymmetrie	0.000	-0.001	-0.029	0.030
	0.200	0.183	0.138	0.228
	-0.050	-0.048	-0.077	-0.020
Mittelwert	0.000	0.000	-0.028	0.029
	0.200	0.204	0.112	-
	-0.050	-0.050	-0.086	-0.021

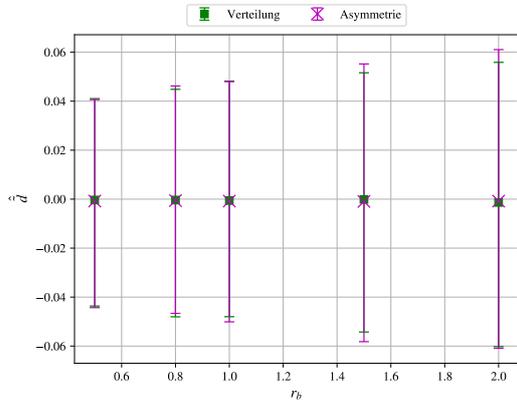
Tabelle 14: Vergleich der Schätzer \hat{d} und der zentralen Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung von \mathcal{OO} bzw. deren Asymmetrie sowie aus der Eichkurve der Mittelwerte $\langle \mathcal{OO} \rangle$. Es wurde hierbei kein Untergrund berücksichtigt.

Anhand der in Tabelle 14 enthaltenen Ergebnisse lässt sich zunächst feststellen, dass alle bestimmten Konfidenzintervalle den hypothetisch angenommenen Wert \tilde{d}_{hyp} enthalten. Für die Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ sind die jeweils aus den drei Methoden bestimmten Konfidenzintervalle gleich groß. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ ist das aus der Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmte Konfidenzintervall größer als das aus der vollen Verteilung bestimmte Intervall. Aus dem Mittelwert der Observablenverteilung wurde keine obere Grenze b_2 des Konfidenzintervalles bestimmt. Die untere Grenze a_2 zeigt eine größere Abweichung von $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ als die jeweils untere Grenze der Konfidenzintervalle, welche aus der Observablenverteilung und aus deren Asymmetrie bestimmt wurden. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ ist das aus der Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmte Konfidenzintervall etwas kleiner als das aus der vollen Verteilung bestimmte Intervall. Der beste Schätzer \hat{d} , welcher jeweils aus dem Mittelwert der Observablenverteilung bestimmt wurde, kommt der jeweiligen Hypothese \tilde{d}_{hyp} im Vergleich zu den beiden anderen Methoden am nächsten. Am weitesten von der Hypothese entfernt sind die besten Schätzer der Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung.

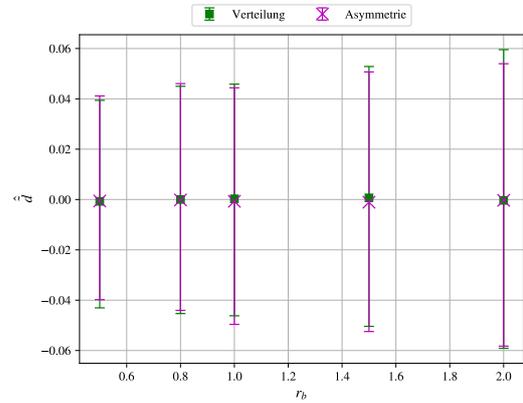
	\tilde{d}_{hyp}	\hat{d}	a_2	b_2
Verteilung	0.000	0.000	-0.033	0.034
	0.200	0.199	0.174	0.222
	-0.050	-0.050	-0.081	-0.015
Asymmetrie	0.000	0.000	-0.033	0.034
	0.200	0.198	0.151	0.246
	-0.050	-0.049	-0.082	-0.014
Mittelwert	0.000	0.000	-0.043	0.043
	0.200	0.201	0.089	-
	-0.050	-0.050	-0.100	-0.007

Tabelle 15: Vergleich der Schätzer \hat{d} und der zentralen Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bzw. deren Asymmetrie sowie aus der Eichkurve der Mittelwerte $\langle \Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}} \rangle$

In Tabelle 15 sind die besten Schätzer \hat{d} und die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% unter Verwendung des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ zusammengefasst. Bei der Bestimmung dieser Resultate wurde kein Untergrund berücksichtigt. Alle Bestimmten Konfidenzintervalle decken den jeweils hypothetisch angenommenen Wert \tilde{d}_{hyp} ab. Für die Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ ist das Konfidenzintervall der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung und das Konfidenzintervall der Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Verteilung gleich groß. Das aus dem Mittelwert $\langle\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}\rangle$ bestimmte Konfidenzintervall ist größer als die Intervalle der beiden erweiterten Maximum-Likelihood-Methoden. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ ist das Konfidenzintervall, welches aus der Asymmetrie der Observablenverteilung bestimmt wurde, größer als das aus der vollen Verteilung bestimmte Intervall. Aus dem Mittelwert der Observablenverteilung wurde für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ keine obere Grenze b_2 bestimmt. Die untere Grenze a_2 ist weiter von \tilde{d}_{hyp} entfernt als die jeweils untere Grenze der beiden erweiterten Maximum-Likelihood-Methoden. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ sind die aus der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung und die aus deren Asymmetrie bestimmten Konfidenzintervalle etwa gleich groß. Bei allen drei Methoden lässt sich feststellen, dass die Konfidenzintervalle für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ größer sind als diejenigen für \mathcal{OO} .



(a) Beste Schätzer und 95.4%-Konfidenzintervalle für \mathcal{OO}



(b) Beste Schätzer und 95.4%-Konfidenzintervalle für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$

Abbildung 49: Vergleich der besten Schätzer \hat{d} und der Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b aus je 1700 Pseudoexperimenten aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Observablenverteilung bzw. ihre Asymmetrie. Die Fehlerbalken stellen die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ dar.

Zum Einfluss des Untergrundes auf die besten Schätzer und die Konfidenzintervalle der beiden erweiterten Maximum-Likelihood-Methoden wird nun beispielhaft die Standardmodellhypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ betrachtet. Abbildung 49 zeigt einen Vergleich der jeweils besten Schätzer der beiden Methoden aus 1700 Pseudoexperimenten für verschiedene Untergrund/Signalverhältnisse r_b . Zur Bestimmung der Schätzer und Konfidenzintervalle in Abbildung 49a wurde die optimale Observable \mathcal{OO} verwendet. Die Werte aus Abbildung 49b wurden anhand des vorzeichenbehafteten Azimuthalwinkels $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bestimmt. Als beste Schätzer \hat{d} wurden die jeweiligen Mittelwerte $\langle\hat{d}\rangle$ angenommen. Die Fehlerbalken stellen die Konfidenzintervalle $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4% dar. Die entsprechenden Werte sind, neben den Werten für die anderen beiden Hypothesen, in den Tabellen in Anhang A zu finden.

Für die besten Schätzer \hat{d} ist keine Abhängigkeit von r_b zu erkennen. Die Größe der Konfidenz-

zintervalle nimmt mit steigendem r_b zu. Der Anstieg der Intervallgröße mit wachsendem r_b scheint für beide betrachteten Observablen und beide Anpassungsmethoden etwa gleich stark.

11.2 Beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeiten

Es werden nun die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten der für 1700 Pseudoexperimente jeweils mit der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Observablenverteilung bestimmten Konfidenzintervalle $r_{1,2}$ mit den entsprechenden Abdeckwahrscheinlichkeiten verglichen, welche mit der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung erhalten wurden. r_1 bezeichnet dabei die beobachtete Abdeckwahrscheinlichkeit der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 68.3% und r_2 diejenige der Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 95.4%. Tabelle 16 zeigt die für \mathcal{OO} erhaltenen Ergebnisse, Tabelle 17 die für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhaltenen. Die Ergebnisse in den beiden Tabellen wurden ohne Berücksichtigung eines Untergrundes bestimmt.

	\tilde{d}_{hyp}	r_1	r_2
Verteilung	0.000	0.697 \pm 0.011	0.955 \pm 0.005
	0.200	0.524 \pm 0.012	0.866 \pm 0.008
	-0.050	0.693 \pm 0.011	0.958 \pm 0.005
Asymmetrie	0.000	0.682 \pm 0.011	0.959 \pm 0.005
	0.200	0.548 \pm 0.012	0.869 \pm 0.008
	-0.050	0.683 \pm 0.011	0.959 \pm 0.005

Tabelle 16: Vergleich der in 1700 Pseudoexperimenten beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten der jeweils aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung von \mathcal{OO} bzw. deren Asymmetrie bestimmten Konfidenzintervalle

Die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten $r_{1,2}$ der Konfidenzintervalle aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die \mathcal{OO} -Verteilung sind für die Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ innerhalb von ein bis zwei Standardabweichungen mit dem jeweiligen Konfidenzniveau verträglich. Auch für die Anpassung an die Asymmetrie der \mathcal{OO} -Verteilung ist dies der Fall. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ erhält man das gleiche Resultat. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ hingegen sind die beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten nicht mit den jeweiligen Konfidenzniveaus verträglich. Die in Tabelle 17 zusammengefassten, unter Verwendung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhaltenen Resultate sind für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ gleich gut mit den jeweiligen Konfidenzniveaus verträglich wie die mit \mathcal{OO} bestimmten Werte. Für $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ zeigt sich für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ im Gegensatz zu \mathcal{OO} eine Übereinstimmung der beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten mit dem jeweiligen Konfidenzniveau innerhalb einer Standardabweichung. Es konnte für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bei der Untersuchung des Einflusses eines CP-invarianten Untergrundes auf die Bestimmung von \tilde{d} mittels erweiterter Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung in Kapitel 9 allerdings festgestellt werden, dass die Verträglichkeit der beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeit für $\tilde{d} = 0.20$ mit der Berücksichtigung des Untergrundes nicht mehr gegeben ist. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass der Untergrund bei der Berechnung der Profillikelihoodfunktion nicht mit ausreichender Genauigkeit abgeschätzt wurde. Dies zu untersuchen, war innerhalb des zeitlichen Rahmens dieser Arbeit nicht möglich.

	\tilde{d}_{hyp}	r_1		r_2	
Verteilung	0.00	0.670	\pm 0.011	0.949	\pm 0.005
	0.200	0.674	\pm 0.011	0.956	\pm 0.005
	-0.050	0.671	\pm 0.011	0.957	\pm 0.005
Asymmetrie	0.000	0.681	\pm 0.011	0.954	\pm 0.005
	0.200	0.682	\pm 0.011	0.949	\pm 0.005
	-0.050	0.679	\pm 0.011	0.957	\pm 0.005

Tabelle 17: Vergleich der in 1700 Pseudoexperimenten beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten der jeweils aus der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung von $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ bzw. deren Asymmetrie bestimmten Konfidenzintervalle

12 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden statistische Methoden zum Test der CP-Invarianz der Higgs-Bosonproduktion in Vektorbosonfusion untersucht. Dazu wurde der Ansatz einer effektiven Feldtheorie verwendet, um über das Standardmodell hinausgehende, CP-ungerade Kopplungen des Higgs-Bosons an schwache Vektorbosonen zu beschreiben. Die damit erhaltene CP-ungerade Beimischung im Matrixelement der Vektorbosonfusion ist linear von einem dimensionslosen Parameter \tilde{d} abhängig. Die Bestimmung dieses Parameters anhand der Beobachtung von CP-ungeraden Observablen ist Gegenstand dieser Arbeit. Zum einen wurde die optimale Observable \mathcal{OO} verwendet, welche die Information des gesamten Phasenraumes des Endzustandes enthält. Zum anderen wurde der vorzeichenbehaftete Azimutalwinkel $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ zwischen den beiden führenden Jets im Endzustand des untersuchten Produktionskanals untersucht.

Um \tilde{d} aus der Verteilung dieser CP-ungeraden Observablen zu bestimmen wurden drei verschiedene Ansätze verwendet. Erstens wurde eine Maximum-Likelihood-Anpassung an die Verteilung der CP-ungeraden Observablen vorgenommen, zweitens eine Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung und drittens wurde \tilde{d} aus dem Mittelwert der Observablenverteilung bestimmt.

Der Schwerpunkt für die Untersuchung der beiden Maximum-Likelihood-Methoden lag auf der Bestimmung von \tilde{d} mit der erweiterten Maximum-Likelihood-Methode, welche die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes der Vektorbosonfusion von \tilde{d} explizit ausnutzt. Hier ergaben sich für die Anpassung an die Observablenverteilung und die Anpassung an deren Asymmetrie etwa gleich große Konfidenzintervalle. Es konnte für hypothetisch angenommene \tilde{d} -Werte $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ gezeigt werden, dass die approximative Bestimmung von Konfidenzintervallen aus der jeweiligen Profillikelihoodkurve Resultate liefert, deren in 1700 generierten Pseudoexperimenten beobachtete Wahrscheinlichkeit, \tilde{d}_{hyp} zu enthalten, mit dem zugehörigen Konfidenzniveau innerhalb der statistischen Unsicherheit übereinstimmt. Für die Hypothese $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$ konnte hingegen keine Übereinstimmung festgestellt werden. Unter Berücksichtigung eines CP-invarianten Untergrundes in der Maximum-Likelihood-Anpassung ergab sich mit der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die volle Verteilung der CP-ungeraden Observablen für die Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ ebenfalls eine Übereinstimmung der beobachteten Abdeckwahrscheinlichkeiten mit dem Konfidenzniveau. Bei der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung ließ sich hingegen keine Übereinstimmung mit dem Konfidenzniveau unter Berücksichtigung des Untergrundes feststellen.

Die Maximum-Likelihood-Anpassung an die reine Form der Asymmetrie der Observablenverteilung hat sich aufgrund einer nichtlinearen Abhängigkeit der erwarteten Asymmetrie nach Normierung auf eine feste Ereignisanzahl als nicht sinnvoll erwiesen.

Aus dem Mittelwert der Observablenverteilung wurden Konfidenzintervalle für die Hypothesen $\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$ und $\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$ bestimmt. Es wurde festgestellt, dass die nach dieser Methode bestimmten Konfidenzintervalle größer sind als bei der erweiterten Maximum-Likelihood-

Anpassung an die Observablenverteilung sowie bei der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an deren Asymmetrie.

Eine Optimierung der erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung unter Berücksichtigung von Untergrundprozessen könnte Gegenstand weiterführender Studien sein. Außerdem steht ein Vergleich der in dieser Arbeit untersuchten erweiterten Maximum-Likelihood-Anpassungsmethoden mit der Maximum-Likelihood-Anpassung an die reine Form der Observablenverteilung aus.

A Anhang: Tabellen der aus der Verteilung von \hat{d} bestimmten Schätzer und Konfidenzintervalle mit Unergrund

A.1 Für \mathcal{OO} erhaltene Ergebnisse

A.1.1 EML-Anpassung an die Observablenverteilung

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.00$											
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1			r_2	
0.5	-0.0004	± 0.0005	-0.022	0.021	-0.044	0.041	0.677	± 0.011	0.948	± 0.005	
0.8	-0.0004	± 0.0006	-0.024	0.023	-0.048	0.045	0.681	± 0.011	0.953	± 0.005	
1.0	-0.0006	± 0.0006	-0.026	0.023	-0.048	0.048	0.686	± 0.011	0.956	± 0.005	
1.5	-0.0001	± 0.0007	-0.027	0.029	-0.054	0.052	0.662	± 0.011	0.958	± 0.005	
2.0	-0.0014	± 0.0007	-0.032	0.028	-0.060	0.056	0.666	± 0.011	0.954	± 0.005	

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.20$											
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1			r_2	
0.5	0.1831	± 0.0005	0.162	0.205	0.137	0.226	0.558	± 0.012	0.896	± 0.007	
0.8	0.1826	± 0.0006	0.160	0.205	0.135	0.228	0.554	± 0.012	0.889	± 0.008	
1.0	0.1823	± 0.0006	0.159	0.206	0.134	0.229	0.568	± 0.012	0.896	± 0.007	
1.5	0.1827	± 0.0006	0.159	0.207	0.131	0.232	0.592	± 0.012	0.914	± 0.007	
2.0	0.1814	± 0.0007	0.155	0.208	0.124	0.234	0.583	± 0.012	0.901	± 0.007	

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.05$											
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1			r_2	
0.5	-0.0493	± 0.0005	-0.071	-0.027	-0.091	-0.008	0.671	± 0.011	0.959	± 0.005	
0.8	-0.0492	± 0.0006	-0.073	-0.025	-0.097	-0.002	0.669	± 0.011	0.951	± 0.005	
1.0	-0.0493	± 0.0006	-0.072	-0.026	-0.100	-0.001	0.706	± 0.011	0.952	± 0.005	
1.5	-0.0490	± 0.0006	-0.075	-0.022	-0.100	0.006	0.688	± 0.011	0.955	± 0.005	
2.0	-0.0499	± 0.0007	-0.080	-0.020	-0.107	0.014	0.657	± 0.012	0.946	± 0.005	

Tabelle 18: Aus 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung an die \mathcal{OO} -Verteilung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle \hat{d} \rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% bzw. $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4%

A.1.2 EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.000$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0008	\pm 0.0005	-0.022	0.021	-0.044	0.041	0.641	\pm 0.012	0.927	\pm 0.006
0.8	-0.0006	\pm 0.0006	-0.025	0.023	-0.047	0.046	0.614	\pm 0.012	0.922	\pm 0.007
1.0	-0.0008	\pm 0.0006	-0.026	0.024	-0.050	0.048	0.620	\pm 0.012	0.918	\pm 0.007
1.5	-0.0009	\pm 0.0007	-0.029	0.027	-0.058	0.055	0.613	\pm 0.012	0.908	\pm 0.007
2.0	-0.0008	\pm 0.0007	-0.030	0.030	-0.061	0.061	0.604	\pm 0.012	0.908	\pm 0.007

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.200$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	0.1847	\pm 0.0006	0.160	0.210	0.132	0.237	0.552	\pm 0.012	0.888	\pm 0.008
0.8	0.1855	\pm 0.0007	0.157	0.213	0.132	0.240	0.581	\pm 0.012	0.886	\pm 0.008
1.0	0.1853	\pm 0.0007	0.158	0.212	0.129	0.243	0.570	\pm 0.012	0.881	\pm 0.008
1.5	0.1856	\pm 0.0007	0.155	0.215	0.124	0.247	0.581	\pm 0.012	0.889	\pm 0.008
2.0	0.1861	\pm 0.0008	0.155	0.217	0.119	0.249	0.592	\pm 0.012	0.899	\pm 0.007

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.050$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0483	\pm 0.0005	-0.070	-0.026	-0.092	-0.004	0.618	\pm 0.012	0.925	\pm 0.006
0.8	-0.0486	\pm 0.0006	-0.073	-0.025	-0.095	0.000	0.624	\pm 0.012	0.920	\pm 0.007
1.0	-0.0493	\pm 0.0006	-0.076	-0.023	-0.100	0.000	0.597	\pm 0.012	0.931	\pm 0.006
1.5	-0.0492	\pm 0.0007	-0.078	-0.022	-0.103	0.007	0.601	\pm 0.012	0.915	\pm 0.007
2.0	-0.0493	\pm 0.0007	-0.080	-0.018	-0.110	0.011	0.614	\pm 0.012	0.912	\pm 0.007

Tabelle 19: Aus 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung an die Asymmetrie der $\mathcal{O}\mathcal{O}$ -Verteilung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle \hat{d} \rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% bzw. $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4%

A.2 Für $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ erhaltene Ergebnisse

A.2.1 EML-Anpassung an die Observablenverteilung

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.000$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0007	\pm 0.0005	-0.022	0.019	-0.043	0.039	0.671	\pm 0.011	0.951	\pm 0.005
0.8	0.0000	\pm 0.0006	-0.023	0.022	-0.045	0.045	0.669	\pm 0.011	0.946	\pm 0.005
1.0	0.0003	\pm 0.0006	-0.023	0.024	-0.046	0.046	0.679	\pm 0.011	0.959	\pm 0.005
1.5	0.0006	\pm 0.0006	-0.025	0.027	-0.050	0.053	0.672	\pm 0.011	0.958	\pm 0.005
2.0	-0.0003	\pm 0.0007	-0.028	0.028	-0.059	0.060	0.693	\pm 0.011	0.947	\pm 0.005

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.200$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	0.1985	\pm 0.0005	0.179	0.219	0.157	0.238	0.665	\pm 0.011	0.954	\pm 0.005
0.8	0.1988	\pm 0.0005	0.177	0.222	0.155	0.239	0.648	\pm 0.012	0.954	\pm 0.005
1.0	0.1992	\pm 0.0005	0.177	0.221	0.153	0.241	0.682	\pm 0.011	0.952	\pm 0.005
1.5	0.1993	\pm 0.0006	0.175	0.223	0.150	0.242	0.665	\pm 0.011	0.952	\pm 0.005
2.0	0.1995	\pm 0.0006	0.174	0.226	0.147	0.246	0.654	\pm 0.012	0.956	\pm 0.005

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.050$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0505	\pm 0.0005	-0.071	-0.031	-0.089	-0.010	0.684	\pm 0.011	0.956	\pm 0.005
0.8	-0.0497	\pm 0.0005	-0.072	-0.027	-0.093	-0.004	0.676	\pm 0.011	0.955	\pm 0.005
1.0	-0.0495	\pm 0.0006	-0.073	-0.026	-0.094	-0.004	0.677	\pm 0.011	0.962	\pm 0.005
1.5	-0.0490	\pm 0.0006	-0.075	-0.024	-0.102	0.004	0.684	\pm 0.011	0.952	\pm 0.005
2.0	-0.0502	\pm 0.0007	-0.078	-0.023	-0.106	0.008	0.696	\pm 0.011	0.951	\pm 0.005

Tabelle 20: Aus 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung an die $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle \hat{d} \rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% bzw. $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4%

A.2.2 EML-Anpassung an die Asymmetrie der Observablenverteilung

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.000$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0006	\pm 0.0005	-0.021	0.020	-0.040	0.041	0.558	\pm 0.012	0.889	\pm 0.008
0.8	-0.0002	\pm 0.0005	-0.023	0.022	-0.044	0.046	0.555	\pm 0.012	0.871	\pm 0.008
1.0	-0.0007	\pm 0.0006	-0.024	0.022	-0.050	0.044	0.554	\pm 0.012	0.882	\pm 0.008
1.5	-0.0011	\pm 0.0006	-0.028	0.026	-0.052	0.051	0.547	\pm 0.012	0.897	\pm 0.007
2.0	-0.0003	\pm 0.0007	-0.027	0.029	-0.058	0.054	0.576	\pm 0.012	0.896	\pm 0.007

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = 0.200$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	0.1967	\pm 0.0006	0.171	0.223	0.144	0.251	0.599	\pm 0.012	0.914	\pm 0.007
0.8	0.1973	\pm 0.0007	0.170	0.225	0.142	0.254	0.608	\pm 0.012	0.909	\pm 0.007
1.0	0.1968	\pm 0.0007	0.169	0.226	0.140	0.255	0.599	\pm 0.012	0.906	\pm 0.007
1.5	0.1970	\pm 0.0008	0.165	0.228	0.136	0.261	0.589	\pm 0.012	0.907	\pm 0.007
2.0	0.1977	\pm 0.0008	0.165	0.230	0.132	0.264	0.621	\pm 0.012	0.915	\pm 0.007

$\tilde{d}_{\text{hyp}} = -0.050$										
r_b	\hat{d}		a_1	b_1	a_2	b_2	r_1		r_2	
0.5	-0.0491	\pm 0.0005	-0.069	-0.029	-0.092	-0.006	0.586	\pm 0.012	0.894	\pm 0.007
0.8	-0.0489	\pm 0.0005	-0.071	-0.027	-0.092	-0.002	0.590	\pm 0.012	0.898	\pm 0.007
1.0	-0.0499	\pm 0.0006	-0.073	-0.026	-0.098	-0.002	0.572	\pm 0.012	0.888	\pm 0.008
1.5	-0.0501	\pm 0.0006	-0.077	-0.024	-0.103	0.003	0.586	\pm 0.012	0.888	\pm 0.008
2.0	-0.0496	\pm 0.0007	-0.077	-0.021	-0.111	0.007	0.596	\pm 0.012	0.880	\pm 0.008

Tabelle 21: Aus 1700 Pseudoexperimenten mit der EML-Anpassung an die Asymmetrie der $\Delta\Phi_{jj}^{\text{sgd}}$ -Verteilung erhaltene Ergebnisse für den Mittelwert $\langle\hat{d}\rangle$ und die Konfidenzintervalle $[a_1, b_1]$ zum Konfidenzniveau 68.3% bzw. $[a_2, b_2]$ zum Konfidenzniveau 95.4%

Literaturverzeichnis

- [1] Sheldon L. Glashow. “Partial-symmetries of weak interactions”. *Nuclear Physics* 22.4 (1961), S. 579–588.
- [2] S. Weinberg. “A Model of Leptons”. *Phys. Rev. Lett.* 19 (21 1967), S. 1264–1266.
- [3] A. Salam. “Weak and Electromagnetic Interactions”. *Conf. Proc.* C680519 (1968), S. 367–377.
- [4] P. W. Higgs. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. *Phys. Rev. Lett.* 13 (16 1964), S. 508–509.
- [5] P. W. Higgs. “Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons”. *Phys. Rev.* 145 (4 1966), S. 1156–1163.
- [6] F. Englert und R. Brout. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. *Phys. Rev. Lett.* 13 (9 1964), S. 321–323.
- [7] T. W. B. Kibble. “Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories”. *Phys. Rev.* 155 (5 1967), S. 1554–1561.
- [8] G. S. Guralnik, C. R. Hagen und T. W. B. Kibble. “Global Conservation Laws and Massless Particles”. *Phys. Rev. Lett.* 13 (20 1964), S. 585–587.
- [9] CMS Collaboration. “The CMS experiment at the CERN LHC”. *Journal of Instrumentation* 3.08 (2008), S08004–S08004.
- [10] ATLAS Collaboration. “The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider”. *JINST* 3 (2008). Also published by CERN Geneva in 2010, S08003. 437 p.
- [11] L. Evans und P. Bryant. “LHC Machine”. *JINST* 3 (2008), S08001.
- [12] ATLAS Collaboration. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. *Phys. Lett.* B716 (2012), S. 1–29. arXiv: 1207.7214 [hep-ex].
- [13] CMS Collaboration. “Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC”. *Phys. Lett.* B716 (2012), S. 30–61. arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
- [14] M. Tanabashi u. a. “Review of Particle Physics”. *Phys. Rev. D* 98 (3 2018), S. 030001.
- [15] A.D. Sakharov. “Baryonic Asymmetry of the Universe”. *Sov. Phys. JTEP* 49 (1979), S. 594–599.
- [16] Andrei D Sakharov. “Baryon asymmetry of the universe”. *Soviet Physics Uspekhi* 34.5 (1991), S. 417–421.
- [17] Andrei D Sakharov. “Violation of CP invariance, asymmetry, and baryon asymmetry of the universe”. *Soviet Physics Uspekhi* 34.5 (1991), S. 392–393.
- [18] Patrick Huet und Eric Sather. “Electroweak baryogenesis and standard model CP violation”. *Phys. Rev. D* 51 (2 1995), S. 379–394.
- [19] M. B. Gavela u. a. “Standard model CP violation and baryon asymmetry”. *Mod. Phys. Lett.* A9 (1994), S. 795–810. arXiv: hep-ph/9312215 [hep-ph].

- [20] ATLAS Collaboration. “Test of CP invariance in vector-boson fusion production of the Higgs boson using the *Optimal Observable* method in the ditau decay channel with the ATLAS detector”. *Eur. Phys. J. C* 76 (2016), S. 658. arXiv: 1602.04516 [hep-ex].
- [21] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. 1. Aufl. Wiley-VCH, 2008. ISBN: 978-3-527-40601-2.
- [22] C. Schillo. *Search for the Standard Model Higgs Boson and Test of CP Invariance in Vector-Boson Fusion Production of the Higgs Boson in the Fully Leptonic $H \rightarrow \tau^+\tau^- \rightarrow l^+l^-4\nu$ Final State in Proton-Proton Collisions with the ATLAS Detector at the LHC*. <https://freidok.uni-freiburg.de/data/11333>. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg. 2016.
- [23] <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11307906>. 31.7.2019.
- [24] W. de Boer. *Anomalous Higgs boson couplings in vector boson fusion at the CERN LHC*. arXiv: 1309.0721 [hep-ph].
- [25] C. S. Wu u. a. “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. *Phys. Rev.* 105 (4 1957), S. 1413–1415.
- [26] J. H. Christenson u. a. “Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson”. *Phys. Rev. Lett.* 13 (4 1964), S. 138–140.
- [27] Nicola Cabibbo. “Unitary Symmetry and Leptonic Decays”. *Phys. Rev. Lett.* 10 (12 1963), S. 531–533.
- [28] Makoto Kobayashi und Toshihide Maskawa. “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”. *Progress of Theoretical Physics* 49.2 (Feb. 1973), S. 652–657. eprint: <http://oup.prod.sis.lan/ptp/article-pdf/49/2/652/5257692/49-2-652.pdf>.
- [29] N. Aghanim u. a. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters” (2018). arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
- [30] V. Hankele, G. Klänke und D. Zeppenfeld. “Anomalous Higgs boson couplings in vector boson fusion at the CERN LHC”. *Phys. Rev. D* 74 (2006), S. 095001. arXiv: hep-ph/0609075 [hep-ph].
- [31] S. Dittmaier u. a. “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 1. Inclusive Observables” (2011). arXiv: 1101.0593 [hep-ph].
- [32] <http://www.t2.ucsd.edu/twiki2/bin/view/HEPProjects/HiggsToZZTo4l>. 31.7.2019.
- [33] LHC Higgs Cross Section Working Group. https://twiki.cern.ch/twiki/pub/LHCPhysics/LHCHSWGCrossSectionsFigures/plot_13tev_H_sqrt.pdf. 9.8.2019.
- [34] D. Atwood und A. Soni. “Analysis for magnetic moment and electric dipole moment form factors of the top quark via $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ ”. *Phys. Rev. D* 45 (7 1992), S. 2405–2413.
- [35] M. Davier u. a. “The optimal method for the measurement of tau polarization”. *Physics Letters B* 306.3 (1993), S. 411–417.
- [36] M. Diehl und O. Nachtmann. “Optimal observables for the measurement of three gauge boson couplings in $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ ”. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 62.3 (1994), S. 397–411.
- [37] M. Ciccolini, A. Denner und S. Dittmaier. “Strong and electroweak corrections to the production of Higgs+2jets via weak interactions at the LHC”. *Phys.Rev.Lett.* 99 (2007). arXiv: 0707.0381 [hep-ph].
- [38] M. Ciccolini, A. Denner und S. Dittmaier. “Electroweak and QCD corrections to Higgs production via vector-boson fusion at the LHC”. *Phys.Rev.D* 77 (2008). arXiv: 0710.4749 [hep-ph].

- [39] A. Denner u. a. “HAWK 2.0: A Monte Carlo program for Higgs production in vector-boson fusion and Higgs strahlung at hadron colliders”. *Comput. Phys. Commun.* 195 (2014), S. 161–171. arXiv: 1412.5390 [hep-ph].
- [40] ATLAS Collaboration. *Luminosity determination in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV using the ATLAS detector at the LHC*. ATLAS-CONF-2019-021. Geneva, 2019.
- [41] D. de Florian u. a. “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 4. Deciphering the Nature of the Higgs Sector” (2016). arXiv: 1610.07922 [hep-ph].
- [42] http://atlasexperiment.org/photos/atlas_photos/selected-photos/full-detector/0803012_01-A4-at-144-dpi.jpg. 9.8.2019.
- [43] P. Nason. “A new method for combining NLO QCD with shower Monte Carlo algorithms”. *JHEP* 11 (2004), S. 040. arXiv: hep-ph/0409146.
- [44] S. Frixione, P. Nason und C. Oleari. “Matching NLO QCD computations with parton shower simulations: the POWHEG method”. *JHEP* 11 (2007), S. 070. arXiv: 0709.2092 [hep-ph].
- [45] S. Alioli u. a. “A general framework for implementing NLO calculations in shower Monte Carlo programs: the POWHEG BOX”. *JHEP* 06 (2010), S. 043. arXiv: 1002.2581 [hep-ph].
- [46] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung*. 12. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2017. ISBN: 978-3-658-16195-8.
- [47] J. Neyman und J. Jeffreys. “Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 236.767 (1937), S. 333–380.
- [48] G. Cowan. *Statistical Data Analysis*. Reprint. Oxford University Press, 2002. ISBN: 0-19-850155-2.
- [49] E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001-2019.
- [50] D. J. Venzon und S. H. Moolgavkar. “A Method for Computing Profile-Likelihood-Based Confidence Intervals”. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 37.1 (1988), S. 87–94.
- [51] E. L. Lehmann. *Testing Statistical Hypotheses*. 2. Aufl. Springer New York, 1986, S. 486. ISBN: 978-1-4757-1925-3.
- [52] S. S. Wilks. “The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses”. *The Annals of Mathematical Statistics* 9.1 (1938), S. 60–62.
- [53] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9. Aufl. New York: Dover, 1964. ISBN: 0486612724.
- [54] J. G. Skellam. “The Frequency Distribution of the Difference Between Two Poisson Variates Belonging to Different Populations”. *Journal of the Royal Statistical Society* 109.3 (1946), S. 296–296.

