Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übungsblatt VII

Martin Flechl, Anna Kopp, Stan Lai

22. Juni 2012

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 32 *Elektromagnetischer Schauer*

Die Gesamtlänge der Spuren geladener Teilchen in einem homogenen elektromagnetischen Kalorimeter wurde in der Vorlesung angeben als:

$$S = \frac{2}{3}X_0 \sum_{\nu=1}^{n_{gen}^{max}} 2^\nu + s_0 \frac{2}{3} N_{Teil}^{max} = \left(\frac{4}{3}X_0 + \frac{2}{3}s_0\right)\frac{E_0}{E_c}. \tag{1}$$

Der erste Beitrag beschreibt die Spurlängen bis zum Schauermaximum, der zweite den von den geladenen Teilchen nach dem Schauermaximum. E_c ist die kritische Energie, n_{gen}^{max} die Anzahl der Verdopplungskaskaden bis zum Maximum, N_{Teil}^{max} die Anzahl der Teilchen im Schauermaximum, X_0 die Strahlungslänge. Um Gleichung 1 besser zu verstehen, beantworten Sie die folgenden Aufgaben:

(i) Leiten Sie die Ausdrücke für n_{gen}^{max} und N_{Teil}^{max} in Abhängigkeit von E_c und der der Energie des einfallenden Teilchens ab.

(ii) Erklären Sie, dass für eine ausreichende Anzahl von Verdopplungskaskaden der relative Anteil der Photonen etwa 1/3 beträgt. Wie erklärt dies den Faktor 2/3 in Gleichung 1?

(iii) Zeigen Sie, dass $\sum_{\nu=1}^{n_{gen}^{max}} 2^\nu = 2^{n_{gen}^{max}+1} - 1 \simeq 2^{n_{gen}^{max}+1}$

(iv) Fügen Sie nun alle Teile zusammen und zeigen Sie, dass der rechte Ausdruck von Gleichung 1 gilt.

Aufgabe 33 *Kalorimeter- und Spurdetektorauflösung*

Sie haben einen Spurdetektor und ein Kalorimeter. Sie liefern Auflösungen von:

$$\sigma_p/p = p \times 10^{-3}[\text{GeV}] \oplus 0.02$$

beziehungsweise

$$\sigma_E/E = 0.05/\sqrt{E}[\text{GeV}] \oplus 0.01.$$

für Elektronen.

(i) Stellen Sie die Abhängigkeiten der Auflösungen vom Elektronenimpuls dar.

(ii) Bei welchem Elektronimpuls sind die Auflösungen gleich?

Aufgabe 34 *Signalnachweis*

Diskutieren Sie drei physikalische Prozesse, über die Signal nachgewiesen werden kann.

Hausaufgaben

Aufgabe 35 *Größe der Verarmungszone* **10 Punkte**

Betrachten Sie einen p-n Übergang mit einer Gleichverteilung der Ladungsdichten:

$$\rho(x) = \begin{cases} eN_D, & 0 < x < x_n \\ -eN_A, & -x_p < x < 0, \end{cases}$$

wobei e die Elementarladung und N_D und N_A die Konzentrationen der Donatoren beziehungsweise der Akzeptoren sind. Weil die Gesamtladung erhalten bleiben muss, gilt auch $N_A x_p = N_D x_n$.

(i) Anhand der Poissongleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon}$$

wobei ε die Permittivität (oder dielektrische Leitfähigkeit) des Materials und V das elektrische Potential sind, zeigen Sie, dass:

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} -\frac{eN_D}{\varepsilon}(x - x_n), & 0 < x < x_n \\ \frac{eN_A}{\varepsilon}(x + x_p), & -x_p < x < 0. \end{cases}$$

Hinweis: Was für einen Wert hat $\frac{dV}{dx}$ bei $x = x_n$ und $x = -x_p$?

(ii) Falls man $V(-x_p) = 0$ setzt, zeigen Sie dass

$$V_0 = V(x_n) = \frac{e}{2\varepsilon}(N_D x_n^2 + N_A x_p^2).$$

Hinweis: Was ist die Grenzbedingung für $V(x)$ bei $x = 0$?

(iii) Zeigen Sie anhand der Ladungserhaltung, dass

$$x_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{eN_D(1 + N_D/N_A)}} \quad \text{und} \quad x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{eN_A(1 + N_A/N_D)}}.$$

(iv) Zeigen Sie, dass die Größe der Verarmungszone $d = x_n + x_p$ mit der Annahme $N_A \gg N_D$ gegeben ist durch:

$$d \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{eN_D}}.$$

Aufgabe 36 *Der Fano-Faktor* **10 Punkte**

Man erwartet naiv, dass die Standardabweichung der Anzahl N der Elektron-Ion Paare der Vorhersage der Poissonstatistik folgt und somit $\sqrt{N}$ ist. In Wirklichkeit ist diese Vorhersage kleiner um einem Fano-Faktor von $\sqrt{F}$. Der Grund, aus dem es eine Verkleinerung der Standardabweichung gibt, liegt in der Tatsache, dass die Anzahl der erzeugten Elektron-Ion Paare begrenzt ist durch Energieerhaltung (in Anbetracht der ursprünglichen Energie des Teilchens).

Für eine bestimmte deponierte Energie E_{total} wird die Energie in unterschiedlichen Schritten übertragen. E_p ist die Energie, die in einem bestimmten Schritt $p \, \epsilon \, [1, N_k]$ deponiert wird für eine Gesamtzahl N_k an Schritten. Gegeben seien:

$$m_p = E_p/W$$

$$\bar{n} = E/W$$

wobei m_p die erwartete Anzahl der erzeugten Elektron-Ion Paare in Schritt p ist und $\bar{n}$ der erwartete Mittelwert der Gesamtanzahl an Elektron-Ion Paaren.

Die Energieauflösung wird dann ausgedrückt durch die Größe:

$$\sigma^2 =< (n - \bar{n})^2 > .$$

(i) Betrachten Sie L Pseudoexperimente, wobei für jedes Experiment k ein bestimmte Anzahl n_k an Elektron-Ion Paaren erzeugt wird. Drücken Sie die Größe $n_k - \bar{n}$ in Abhängigkeit von m_{pk}, W, und E_{pk} aus. Dabei sind m_{pk} und E_{pk} die Anzahl der Elektron-Ion Paare für den $p$ten Schritt beziehungsweise die deponierte Energie im $p$ten Schritt für Experiment k.
Hinweise: Sie brauchen die Gesamtsumme über die Schritte p von 1 bis N_k.

(ii) Anhand der Variablen $\nu_{pk} = m_{pk} - \frac{E_{pk}}{W}$, zeigen Sie dass:

$$n_k - \bar{n} = \sum_{p=1}^{N_k} \nu_{pk}.$$

Zeigen Sie auch, dass die Varianz in den L Pseudoexperimenten gegeben ist durch:

$$\sigma^2(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} \left(\sum_{p=1}^{N_k} \nu_{pk} \right)^2 .$$

(iii) Diese Summe kann umgeschrieben werden:

$$\sigma^2(n) = \frac{1}{L} \left(\sum_{k=1}^{L} \sum_{p=1}^{N_k} \nu_{pk}^2 + \sum_{k=1}^{L} \sum_{i \neq j}^{N_k} \nu_{ik}\nu_{jk} \right) .$$

Es kann gezeigt werden, dass der zweite Term

$$\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} \sum_{i \neq j}^{N_k} \nu_{ik}\nu_{jk}$$

nichts beiträgt. Zeigen Sie, dass

$$\sigma^2(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=1}^{N_k} \nu_{pk}^2 = \overline{N} \times \overline{(m_p - E_p/W)^2},$$

wobei $\bar{N} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} N_k$.

(iv) Zeigen Sie, dass

$$\sigma^2(n) = \frac{\overline{(m_p - E_p/W)^2}}{\overline{m_p}} \overline{n}.$$

Hinweis: Was ist der Zusammenhang zwischen $\overline{N}, \overline{n}$, and $\overline{m_p}$?

Die Varianz auf n ist also $\sigma^2(n) = F\bar{n}$ mit dem Fano-Faktor:

$$F = \frac{\overline{(m_p - E_p/W)^2}}{\overline{m_p}}.$$