Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Sommersemester 2012

Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übungsblatt XI

Martin Flechl, Anna Kopp, Stan Lai

20.7.2012

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 54 *Erwartungstreue*

Gegeben Sei eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ vom Umfang n.

(i) Zeigen Sie, dass der Schätzer für den Mittelwert der wahren Verteilung

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

erwartungstreu ist.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bekannt ist. Zeigen Sie, dass der Schätzer für die Varianz der wahren Verteilung

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

erwartungstreu ist.

(iii) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes nicht bekannt ist und stattdessen der Schätzer aus (i) verwendet wird. Zeigen Sie, dass die so erhaltene Varianz nicht erwartungstreu ist. Nutzen Sie aus, dass gilt $E[x_i x_j] = \mu^2$ für $i \neq j$ und $E[x_i x_j] = \mu^2 + \sigma^2$ für $i = j$.

(iv) Wie muss man den Schätzer für die Varianz modifizieren, um zu einem erwartungstreuen Schätzer zu kommen?

Aufgabe 55 *Maximum Likelihood für die Poissonverteilung*

Die Anzahl k der innerhalb einer Minute das Höllental passierenden LKW sei poissonverteilt, d.h. es gilt:

$$f(k;\nu) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \nu > 0.$$

Eine Stichprobe mit Umfang $n = 100(x_1, \ldots, x_{100})$ liefert folgendes Ergebnis:

k	absolute Häufigkeit
0	10
1	20
2	30
3	20
4	10
5	5
6	5
7+	0

(i) Schätzen Sie den Wert des Parameters ν, indem Sie $L(\nu) = \prod_{i=1}^{100} f(k = x_i; \nu)$ maximieren für die gegebene Stichprobe $(x_1, \ldots, x_{100})$.

(ii) Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{\nu}$ für eine allgemeine Stichprobe vom Umfang n, indem Sie $\ln L$ maximieren.

(iii) Ist der Schätzer erwartungstreu?

(iv) Berechnen Sie die Varianz $V(\hat{\nu})$ für den Fall $n \to \infty$ unter der Annahme, dass der ML-Schätzer effizient ist. Verwenden Sie die MVB für erwartungstreue Schätzer

$$V[\hat{\nu}] = E\left[-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \nu^2}\right]^{-1}$$

und dass für einen effizienten Schätzer gilt

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \nu^2}\right] = \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \nu^2}\right)_{\nu=\hat{\nu}}$$

.