

Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Sommersemester 2011/2012

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Prof. Markus Schumacher

Physikalisches Institut, Westbau, 2. OG Raum 008

Telefon 07621 203 7612

E-Mail: Markus.Schumacher@physik.uni-freiburg.de

Kapitel 10: Ausgewählte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen

<http://terascale.physik.uni-freiburg.de/lehre/Sommersemester%202012>

Binomial-Verteilung

Betrachte N unabhängige Messungen/Experimente (Bernoulli-Versuche):

Ausgang jedes Experimentes ist entweder "Erfolg" oder "Misserfolg"

Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg (Misserfolg) sind p bzw. $(1-p)$

Definiere diskrete ZV als Anzahl der Erfolge n ($0 \leq n \leq N$).

Wkt. für eine spezielle Reihenfolge von n Erfolgen und $(N-n)$ Misserfolgen ist:

$$p p (1 - p) p (1 - p) = p^n (1 - p)^{N-n}$$

Aber Anordnung ist unwichtig \rightarrow Kombinatorik: es gibt $\frac{N!}{n!(N-n)!}$

Möglichkeiten (Permutationen) n Erfolge in N Versuchen einzuordnen.

Geamtwkt. für n Erfolge ist die Summe der Wkt. für jede Permutation.

Binomial-Verteilung (2)

Die Binomialverteilung lautet:

$$f(n; N, p) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Zufalls-
variable

Parameter

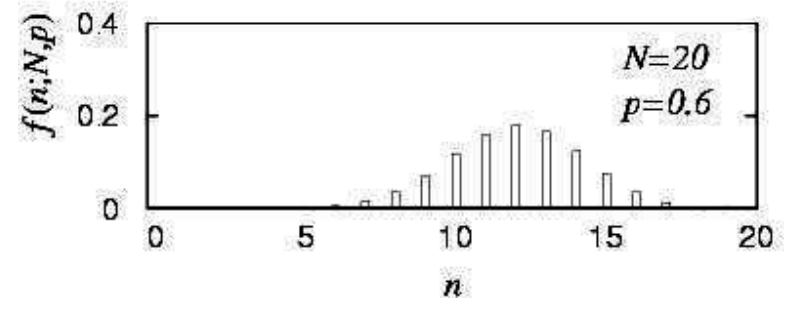
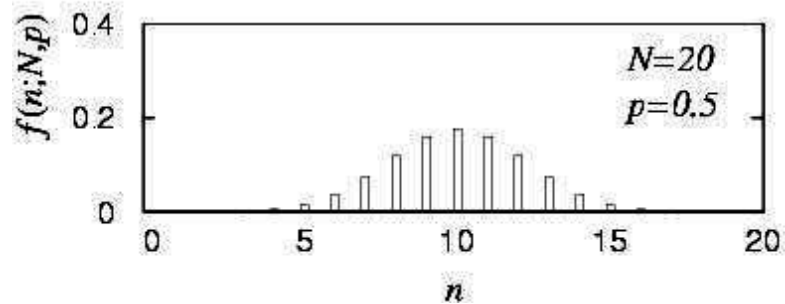
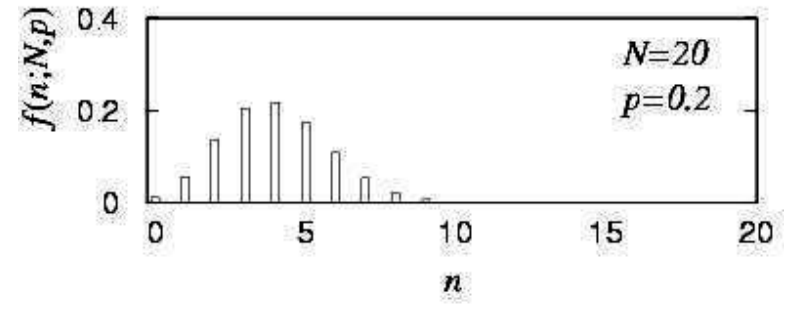
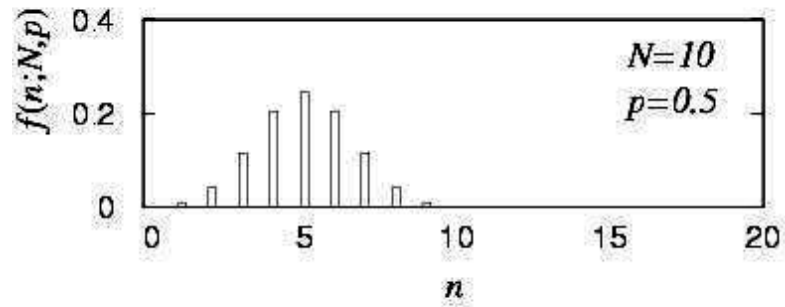
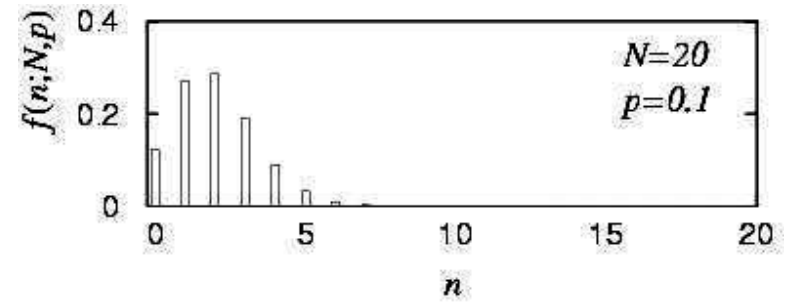
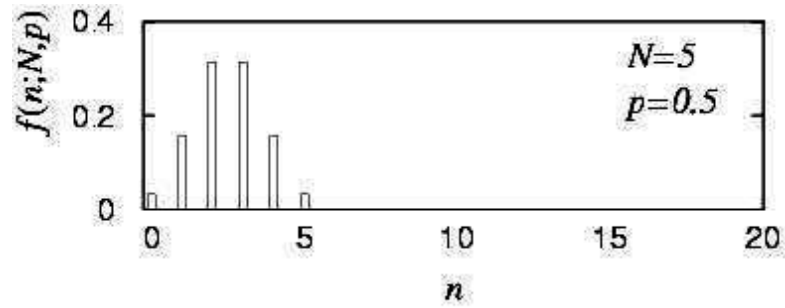
Für den Erwartungswert und die Varianz findet man:

$$E[n] = \sum_{n=0}^N n f(n; N, p) = Np \quad V[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = Np(1-p)$$

Die charakteristische Funktion lautet: $\phi_n(k; p, N) = (p(\exp(ik) - 1) + 1)^N$

Binomial-Verteilung (3)

Verteilungen für verschiedene Parameter p und Anzahl der Versuche N :



Schiefte: $(1-2p)/\sqrt{Np(1-p)}$ Wölbung: $(1-6p(1-p))/(Np(1-p))$
Beide verschwinden für $N \rightarrow \infty$. Binomial geht gegen Gauss-WDF.

Binomial-Verteilung: Beispiele

Nachweis eines Objektes mit Detektor

Ansprechwahrscheinlichkeit eines Detektors $p=0.95$

Bedingung: mindestens Treffer in drei Detektorlagen für Rekonstruktion der Spur

Frage: wieviel Kammern werden benötigt um $>99\%$ effizient zu sein?

3 Kammern: $P(k=3;0.95,3) = 0.95^3 = 0.857$

4 Kammern: $P(k\geq 3;0.95,4)=0.171+0.815=0.986$

5 Kammern: $P(k\geq 3;0.95,5)=0.021+0.204+0.774=0.999$

Wahrscheinlichkeit für Erfolg p

Wieviele Versuche damit mindestens 1 Erfolg mit $Wkt \geq \alpha$?

$P(k\geq 1;p,n) \geq \alpha$ oder $1-P(k=0;p,n)\geq\alpha$

$P(k=0)\leq 1-\alpha$

$(1-p)^N\leq 1-\alpha$

$N\geq \ln(1-\alpha)/\ln(1-p)$

Multinomialverteilung

Wie Binomial aber nun m verschiedene Ausgänge an Stelle von zwei, mit Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ausgänge:

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_m), \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1 .$$

Für N Versuche suchen wir die Wahrscheinlichkeit das folgende Ergebnis zu erhalten:

$$\begin{aligned} n_1 & \text{ von Möglichkeit 1,} \\ n_2 & \text{ von Möglichkeit 2,} \\ & \dots \\ n_m & \text{ von Möglichkeit } m. \end{aligned}$$

Die Wkt.dichtefunktion ist die Multinomialverteilung für $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$

$$f(\vec{n}; N, \vec{p}) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Multinomialverteilung (2)

Nun betrachte Möglichkeit i as ‘Erfolg’, alle anderen als “Misserfolg”.

→ alle individuellen n_i binomialverteilt mit Parametern N, p_i

$$E[n_i] = Np_i, \quad V[n_i] = Np_i(1 - p_i) \quad \text{für alle } i$$

Für die Kovarianzen (i ungleich j) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{cov}[n_i, n_j] &= E[(n_i - E[n_i])(n_j - E[n_j])] \\ &= E[n_i n_j] - E[n_i]E[n_j] \\ &= N(N - 1)p_i p_j - (Np_i)(Np_j) \\ &= -Np_i p_j. \end{aligned}$$

Negative Korrelation:
wenn in einer Klasse mehr
Ereignisse sind, müssen
irgendwo welche fehlen

$$\rho_{n_i n_j} = \frac{\text{cov}[n_i, n_j]}{\sigma_{n_i} \sigma_{n_j}} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}}$$

Multinomialverteilung (3): Beispiele

$\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$ repräsentiert ein Histogramm

Mit m bins, N (bekannt) Gesamteinträgen

Zerfall eines instabilen Teilchens A: (1) $A \rightarrow BC$, (2) $A \rightarrow DE$, (3) $A \rightarrow FG$

Mit bekannten Zerfallswahrscheinlichkeiten für alle drei Modi.

(n_{BC}, n_{DE}, n_{FG}) folgt Multinomialverteilung.

Textanalyse: Auftreten der einzelnen Bustaben des Alphabets.

(n_A, \dots, n_Z) folgt Multinomialverteilung.

Poissonverteilung

Betrachte Grenzfall der Binomialverteilung mit

$$N \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad E[n] = Np \rightarrow \nu \text{ .konstant}$$

→ n folgt der Poissonverteilung ($\nu=\lambda$):

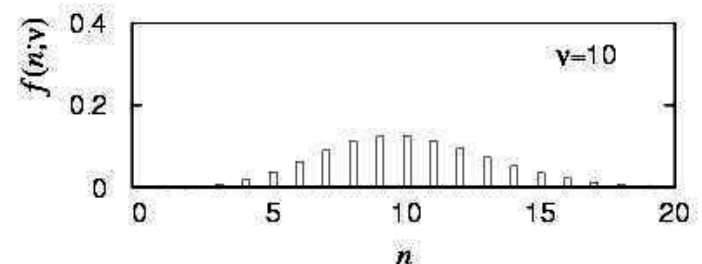
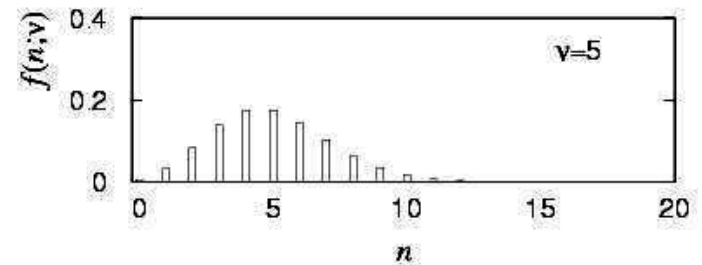
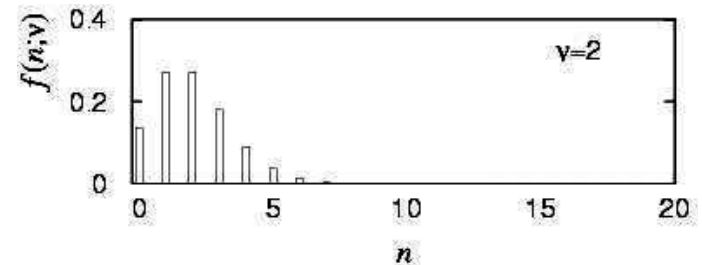
$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \quad (n \geq 0)$$

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda,$$

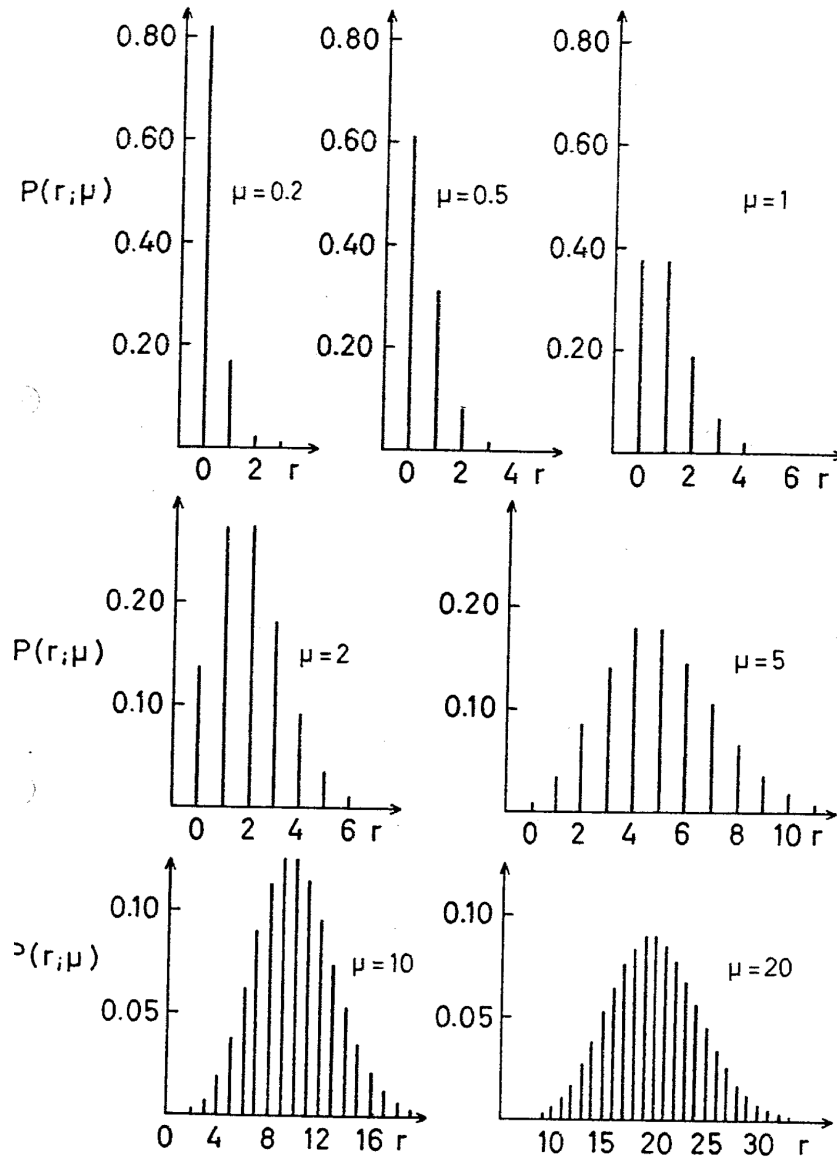
$$V[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \lambda)^2 \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda.$$

Schiefe = $1/\sqrt{\lambda}$ Wölbung = $1/\lambda$

Modalwert: = 0 für $\lambda < 1$
= λ und $\lambda-1$ für λ ganzzahlig



Poissonverteilung (2)



Poissonverteilung (3): Alternative Herleitung

Poissonprozess: Wahrscheinlichkeit für Auftreten eines Ereignisses pro Zeit- oder Wegintervall ist konstant und gleich g

Poissonannahmen:

- a) ≤ 1 Ereignis in $[l, l+\Delta l]$
- b) Wahrscheinlichkeit für 1 Ereignis in Δl ist $g\Delta l$
- c) Auftreten von Ereignis in $[l, l+\Delta l]$ unabhängig davon, ob Ereignis in anderem Intervall stattfindet

Wahrscheinlichkeit für 1 bzw. 0 Ereignis in $[l, l+\Delta l]$

$$P_1(\Delta l) = g \Delta l \quad P_0(\Delta l) = 1 - g \Delta l$$

Wegen Unabhängigkeit der Ereignisse gilt: $P_0(l+\Delta l) = P_0(l)P_0(\Delta l)$

$$(P_0(l+\Delta l) - P_0(l)) / \Delta l = -g P_0(l)$$

Grenzübergang $\Delta l \rightarrow 0$: $dP_0(l)/dl = -g P_0(l)$

Lsg: $P_0(l) = P_0(0)\exp(-gl)$ mit $P_0(0) = 1$

$P_0(l)$: Wahrscheinlichkeit für kein Ereignis bis l

Poissonverteilung (4): Alternative Herleitung

Nun Wahrscheinlichkeit für k Ereignisse bis $l+\Delta l$

$$P_k(l+\Delta l) = P_k(l)P_0(\Delta l) + P_{k-1}(l)P_1(\Delta l)$$

$$\text{mit } P_1(\Delta l) = g \Delta l \quad P_0(\Delta l) = 1 - g \Delta l$$

$$(P_k(l+\Delta l) - P_k(l)) / \Delta l = -g P_k(l) + g P_{k-1}(l)$$

$$\Delta l \rightarrow 0: \quad dP_k(l) / dl = -g \{P_k(l) - P_{k-1}(l)\}$$

$$\text{Lsg: } P_k(l) = \frac{1}{k!} (gl)^k \exp(-gl)$$

Dies ist Poissonverteilung mit Mittelwert gl

k = Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall/Wegintervall,
wenn Ereignisse unabhängig und mit konstanter Rate passieren.

Poissonverteilung: Bemerkungen und Beispiele

Sei $z = x + y$ die Summe von 2 poissonverteilten ZV x und y .
ZV z folgt der Poissonverteilung.

Mittelwert = Summe der Mittelwerte der einzelnen ZV

Wenn Ereignisse gemäß Poisson-WDF verteilt, dann folgt die WDF für den Abstand zwischen zwei Ereignissen der Exponential-WDF.

Beispiele: Anzahl der Todesfälle durch Huftritt in preussischer Armee

Radioaktive Zerfälle einer Probe mit $\Gamma = 1/\tau$

ZV Anzahl Zerfälle in Δt ist poissonverteilt mit $\lambda = \Delta t/\tau$

Gegeben sei ein Histogramm mit Bineinträgen n_i .

Die Gesamtzahl N (Summe über n_i) sei ebenfalls eine ZV.

Die Verteilung in jedem Bin wird durch Poisson-WDF beschrieben. (Äquivalent zu Multinomial-WDF und Gesamtzahl N der Einträge als Poisson-ZV).

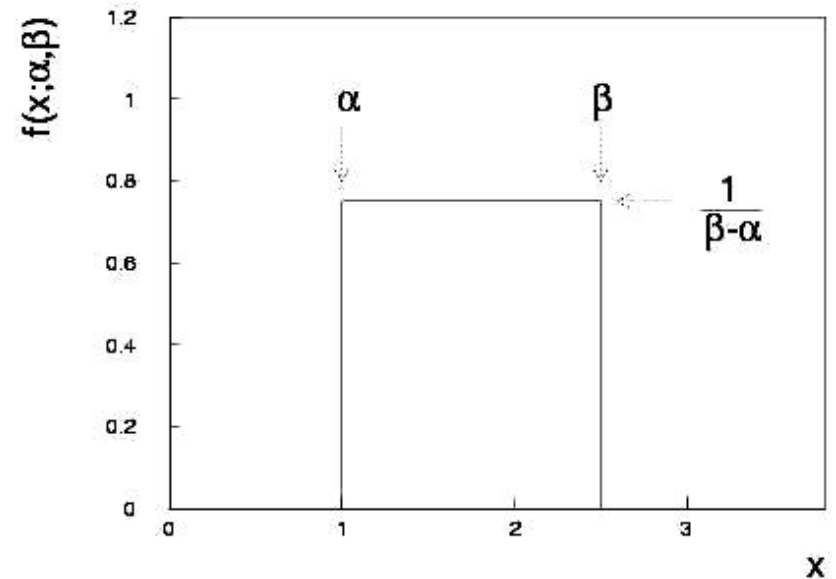
Gleichverteilung

Betrachte kontinuierliche ZV x mit $-\infty < x < \infty$. Die Gleichverteilung lautet:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$



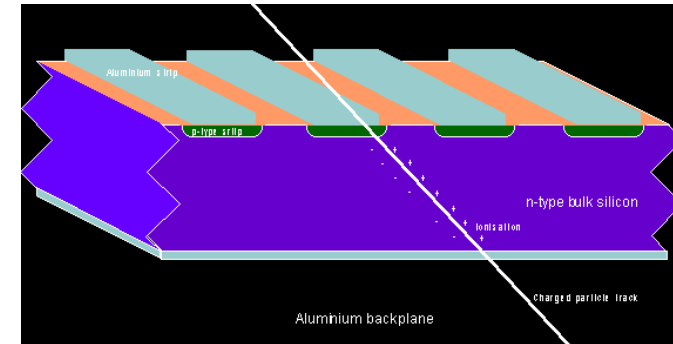
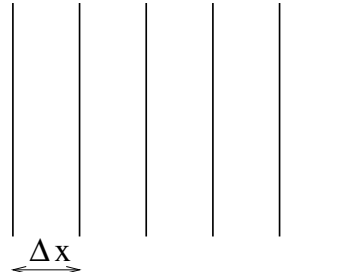
Schiefe = 0 Wölbung = - 1.2

Bemerkung: für beliebige ZV x mit Kumulativverteilung $F(x)$ gilt, dass die ZV $y = F(x)$ gleichverteilt in $[0, 1]$ ist.

Gleichverteilung (2): Beispiele

Streifenzähler mit binärer Auslese mit Streifenabstand/-breite $50 \mu\text{m}$

→ Auflösung
= $50 \mu\text{m} / \text{sqrt}(12)$
= $14.4 \mu\text{m}$



Zeitmessung mit Uhr die nur Minutenanzeige hat

→ Zeitauflösung
= $60 \text{ s} / \text{sqrt}(12)$
= 17.3 s



Exponentialverteilung

Die Exponential-WDF für kontinuierliche ZV x ist definiert als:

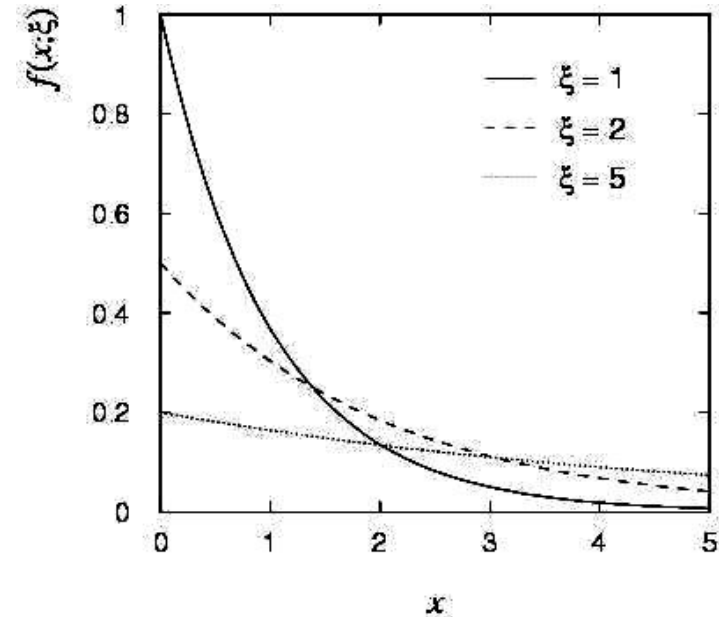
$$f(x; \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \xi$$

$$V[x] = \xi^2$$

Schiefe = 2

Wölbung = 6



Beispiel: Zerfallszeit eines instabilen Teilchens

$$f(t; \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (\tau = \text{mittlere Lebensdauer})$$

Kein Gedächtnis (einzigartig für Exp-WDF) $f(t - t_0 | t \geq t_0) = f(t)$

Exponentialverteilung (2)

Kein Gedächtnis (einzigartig für Exp-WDF) $f(t - t_0 | t \geq t_0) = f(t)$

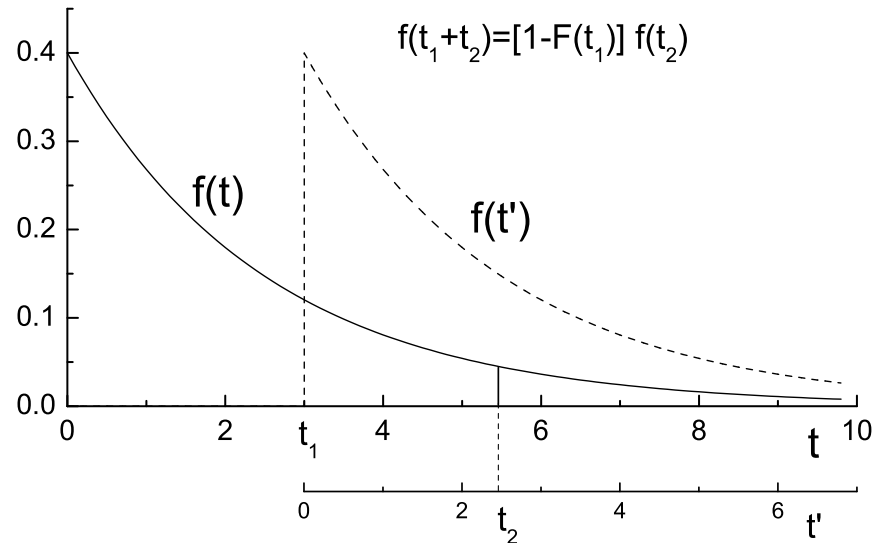


Abb. 2.20. Exponentialverteilung für Vorgänge ohne Gedächtnis.

Wkt für Zerfall bei t_2 : $f(t_1 + t_2) = (1 - F(t_1)) f(t_2)$

Wegen Symmetrie in 1 und 2 gilt: $1 - F(t_1) = cf(t_1)$, $f(t_1 + t_2) = cf(t_1)f(t_2)$

Diese Eigenschaft besitzt nur die Exponentialfunktion

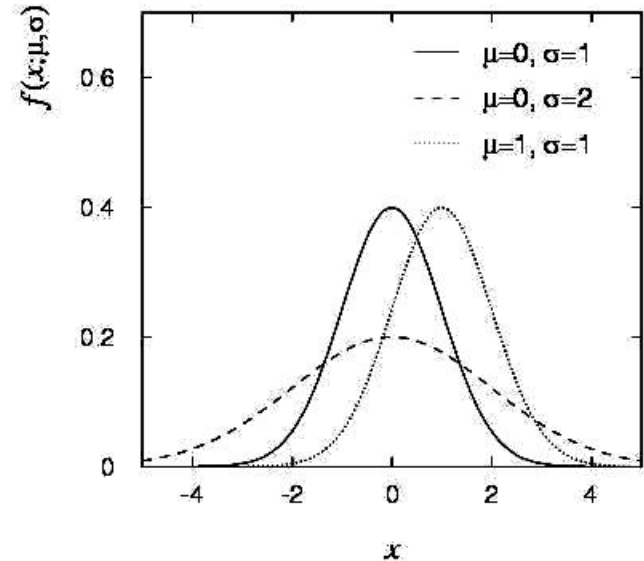
Gauss- oder Normalverteilung

Dies Gauss- oder Normal-WDF für eine kontinuierliche ZV x ist definiert als:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E[x] = \mu$$

$$V[x] = \sigma^2$$



Spezialfall: $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ('Standard-Gauss'):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x') dx'$$

Wenn y aus Gauss-WDF mit μ, σ^2 , dann folgt $x = (y - \mu) / \sigma$ der $\varphi(x)$.

Gaussverteilung(2) : Kumulativverteilung

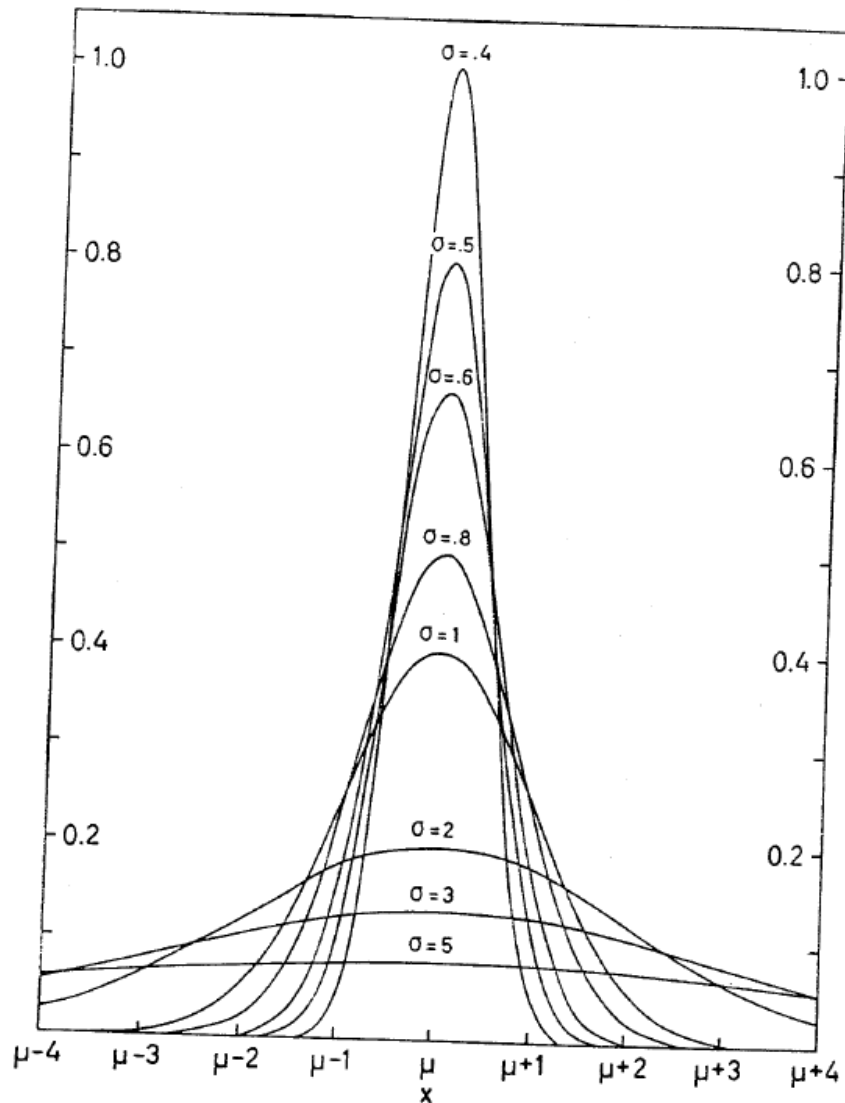


Fig. 4.6. The normal p.d.f. $N(\mu, \sigma^2)$ for different values of the standard deviation σ .

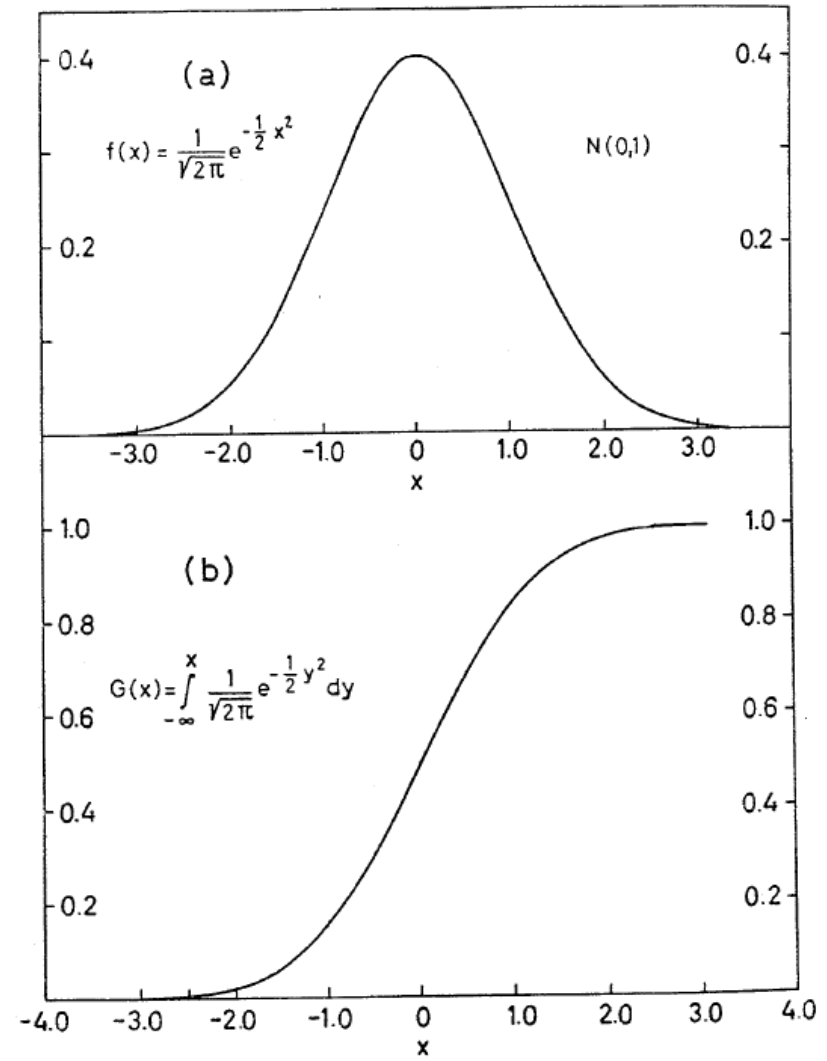
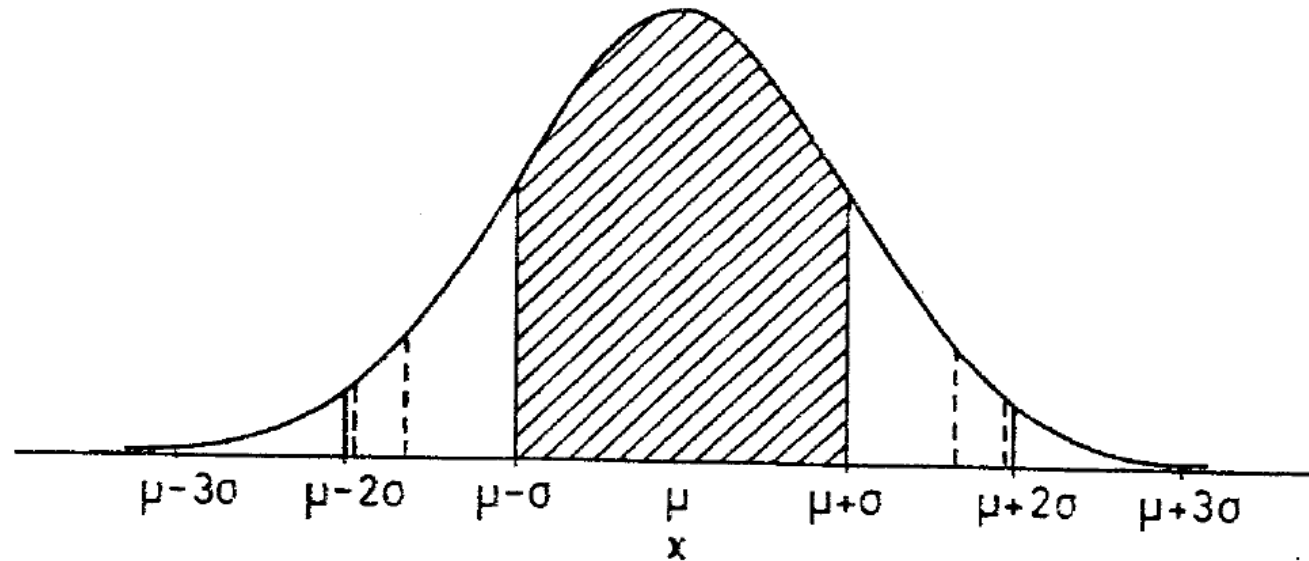


Fig. 4.7. (a) The standard normal p.d.f. $N(0,1)$.
(b) The cumulative standard normal distribution.

Gauss- oder Normalverteilung (3)



$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 2G(1) - 1 = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 2G(2) - 1 = 0.9549$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 2G(3) - 1 = 0.9973.$$

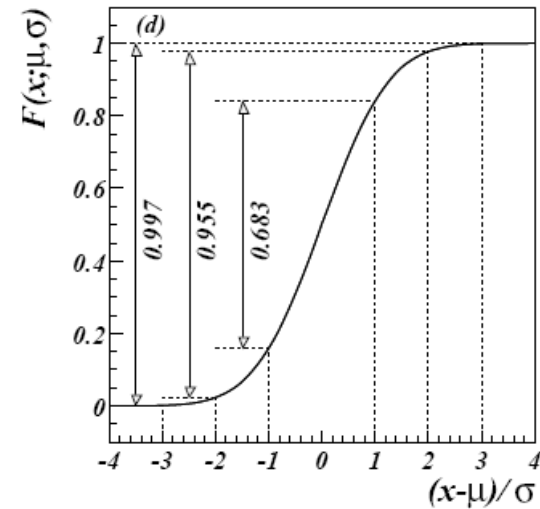
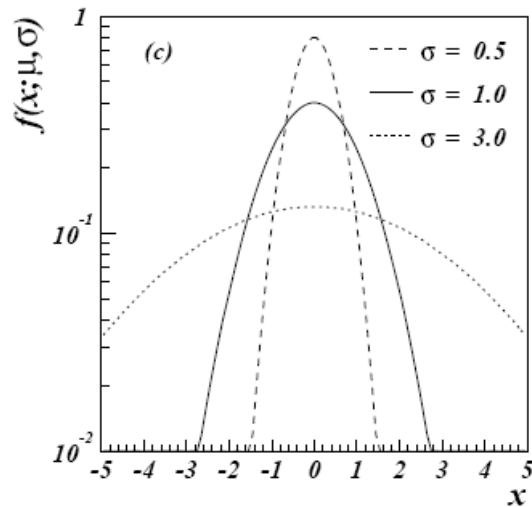
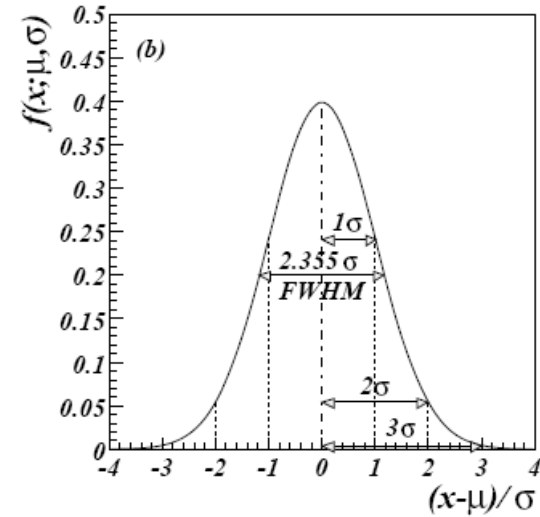
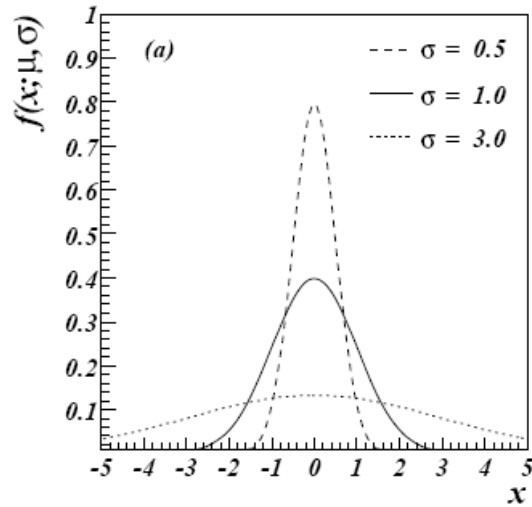
$$P(\mu - 1.645\sigma \leq x \leq \mu + 1.645\sigma) = 0.90$$

$$P(\mu - 1.960\sigma \leq x \leq \mu + 1.960\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 2.576\sigma \leq x \leq \mu + 2.576\sigma) = 0.99$$

$$P(\mu - 3.290\sigma \leq x \leq \mu + 3.290\sigma) = 0.999$$

Gauss- oder Normalverteilung (4)



Gauss- oder Normalverteilung (4): Bemerkungen

Summe von ZV aus Gaussverteilung sind wieder gaussverteilt.

Mittelwert = Summe der Mittelwerte Varianz = Summe der Varianzen

Schiefe und Wölbung = 0

Zentrale Momente: $\mu_{2r} = 2r! / (2^r r!)$ $r \geq 1$ ungerade Momente verschwinden

Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz unabhängig genau dann, wenn x_i aus selber Gaussverteilung (eindeutig für Gauss-WDF!)

Viele andere WDFs gehen in Grenzfällen in Gauss-WDF über.

Gauss-WDF und Zentraler Grenzwertsatz

Die Gaussverteilung ist von so großer Bedeutung weil jede ZV, die die Summe aus einer großen Anzahl kleiner Zahlenbeiträge ist gemäß ihr verteilt ist. Dies folgt aus dem “Zentralen Grenzwertsatz”:

Gegeben n unabhängige ZV x_i mit endlicher Varianzen σ_i^2 , aber ansonsten beliebigen WDFs. Betrachte die ZV y als Summe

$$y = \sum_{i=1}^n x_i$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gilt, dass y einer Gaussverteilung folgt mit

$$E[y] = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad V[y] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Messfehler sind oft die Summe aus vielen kleinen Beiträgen. Daher können Werte häufig als gaussverteilt angenommen werden.

Der ZGS kann unter Verwendung der charakteristischen Funktionen bewiesen werden (siehe z.B. Cowan Kapitel 10).

Zentraler Grenzwertsatz (ZGS) (2)

Für endliche n , gilt der ZGS in “guter” Näherung wenn die Fluktuationen der Summe der ZV nicht durch einen (oder wenige) Beiträge dominiert wird.



Vorsicht vor Messungen mit nicht-Gausschen Fehlern

Gutes Beispiel: Geschwindigkeitskomponente v_x von Luftmolekülen

“OK”-Beispiel: totale Ablenkung durch Coulomb-Vielfachstreuung
(Seltene Ablenkungen unter gr. Winkeln ergeben nicht-gaussche Ausläufer)

Schlechtes Beispiel: Energieverlust von geladenem Teilchen in dünner Gasschicht. (Seltene Kollisionen tragen Großteil des Energieverlustes → Landau-WDF).

Gutes Beispiel: Größe des Menschen. Viele Faktoren beeinflussen Größe.

Schlechtes Beispiel: Gewicht des Menschen. Dominiert durch Essverhalten.

Zentraler Grenzwertsatz (ZGS) (3): Messpraxis

Betrachte Stichprobe der ZV x vom Umfang N

der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ist ZV

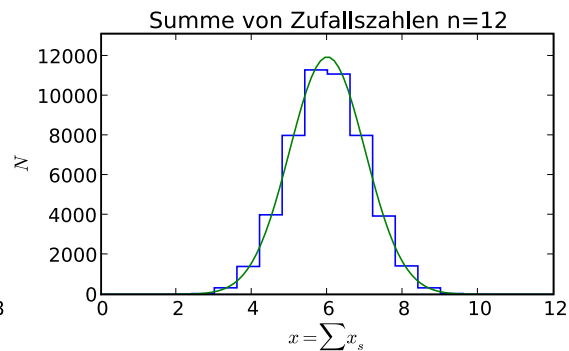
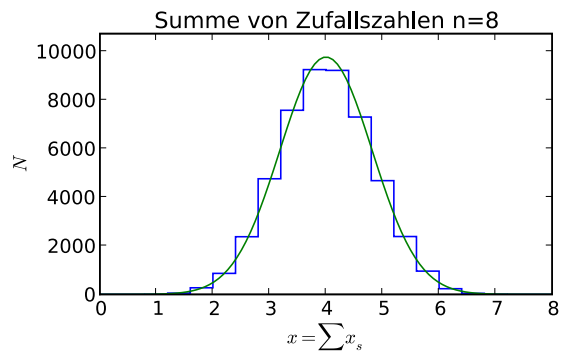
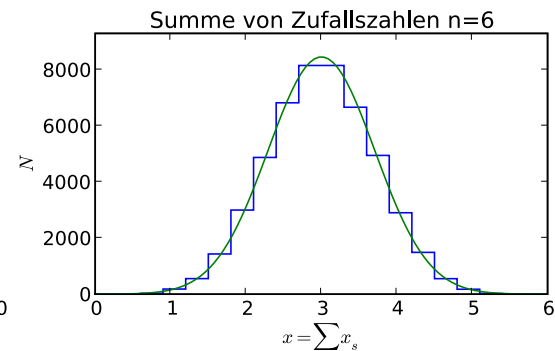
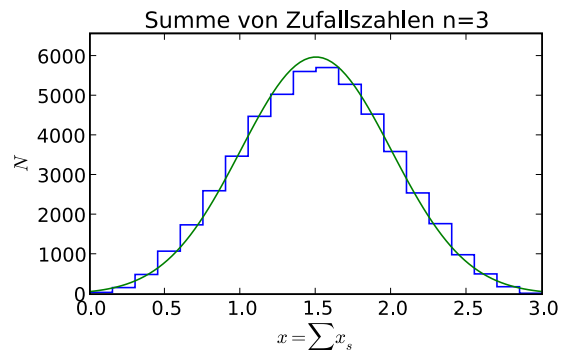
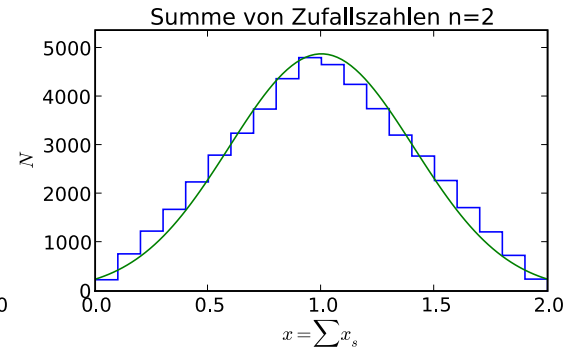
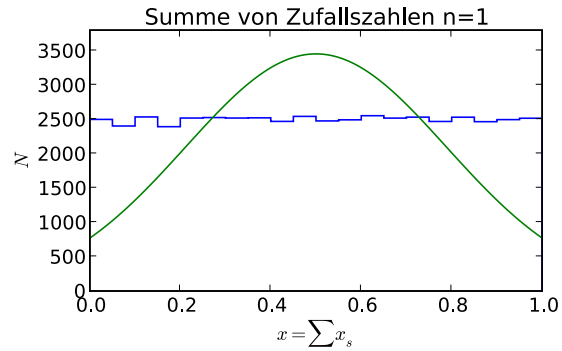
x_i sei aus beliebiger WDF mit $E[x]=\mu$ und $V[x]=\sigma^2$

Der Zentrale Grenzwert Satz liefert (für $N \rightarrow$ unendlich):

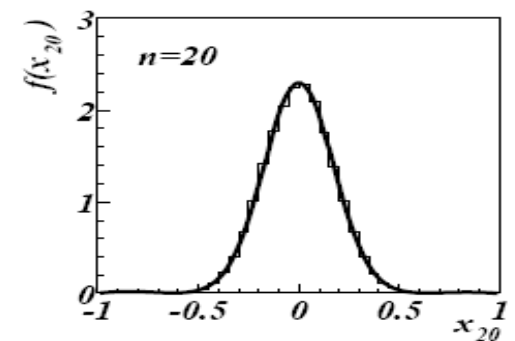
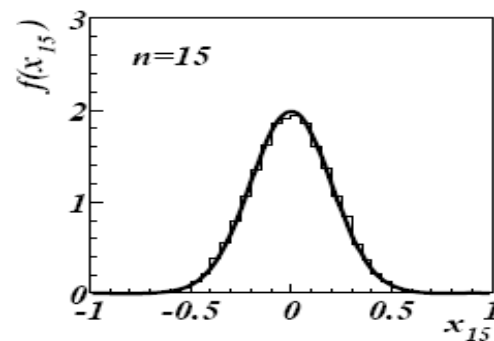
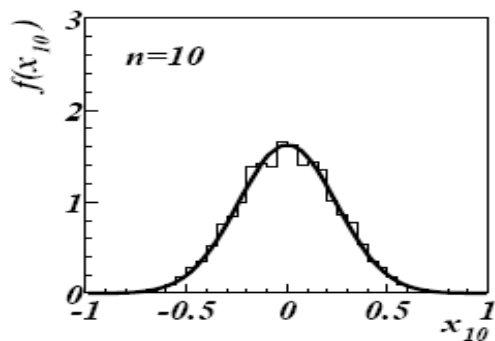
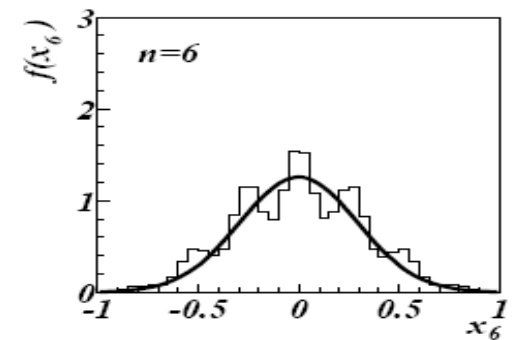
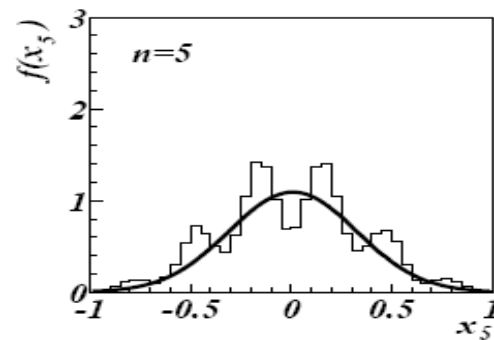
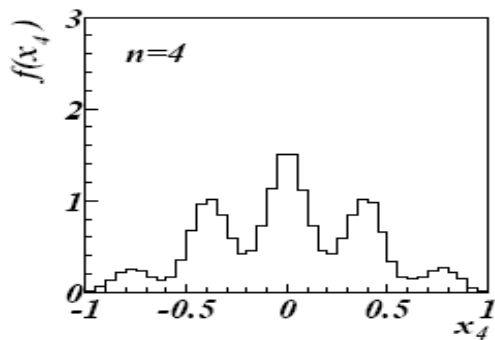
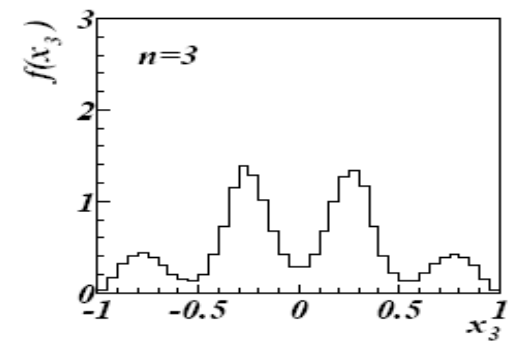
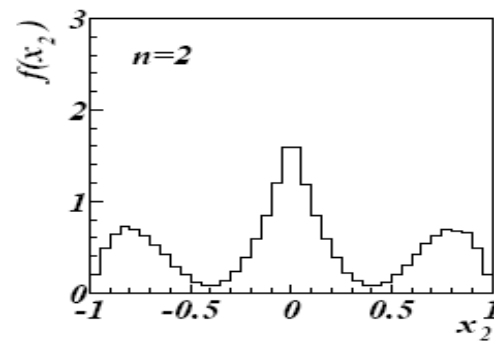
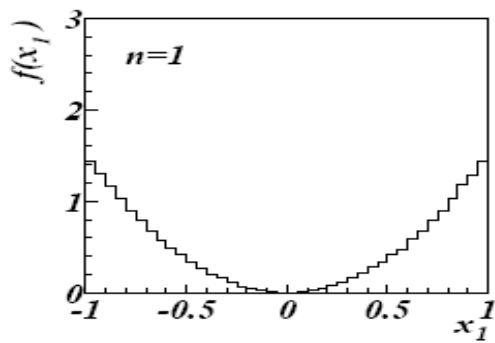
$$E[\bar{x}] = 1/N \sum_i \mu = \mu \quad V[\bar{x}] = 1/N^2 \sum_i \sigma^2 = \sigma^2/N$$

→ WDF für Stichprobenmittelwert (für N nicht zu klein)
ist Gaussverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2/N

Zentraler Grenzwertsatz bei der Arbeit



Zentraler Grenzwertsatz bei der Arbeit (2)



Mehrdimensionale Gaussverteilung

Mehrdimensionale Gauss-WDF für Vektor von ZV $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$f(\vec{x}; \vec{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |V|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right]$$

\vec{x} , $\vec{\mu}$ sind Spaltenvektoren \vec{x}^T , $\vec{\mu}^T$ sind transponierte (Zeilen-)Vektoren

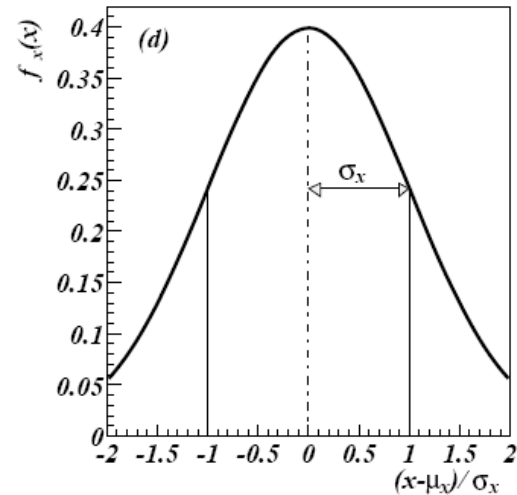
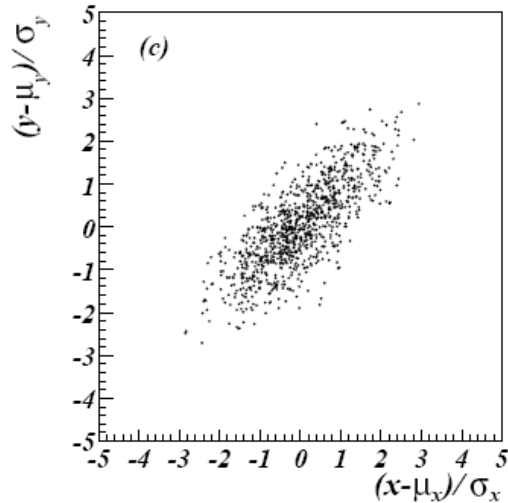
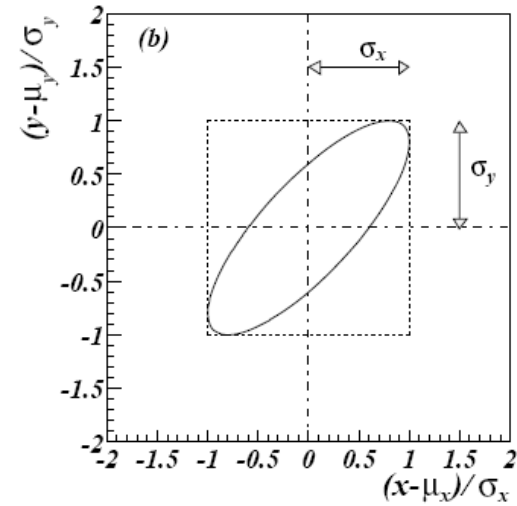
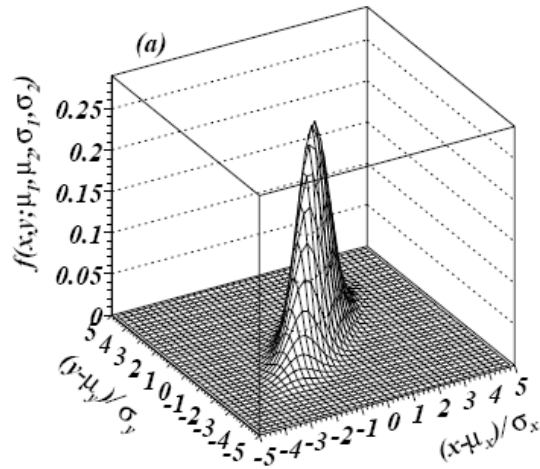
$$E[x_i] = \mu_i, \quad \text{COV}[x_i, x_j] = V_{ij} .$$

Für $n = 2$ ist die WDF gegeben durch:

$$f(x_1, x_2; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right] \right\}$$

wobei $\rho = \text{cov}[x_1, x_2]/(\sigma_1\sigma_2)$ der Korrelationskoeffizient ist.

Mehrdimensionale Gaussverteilung



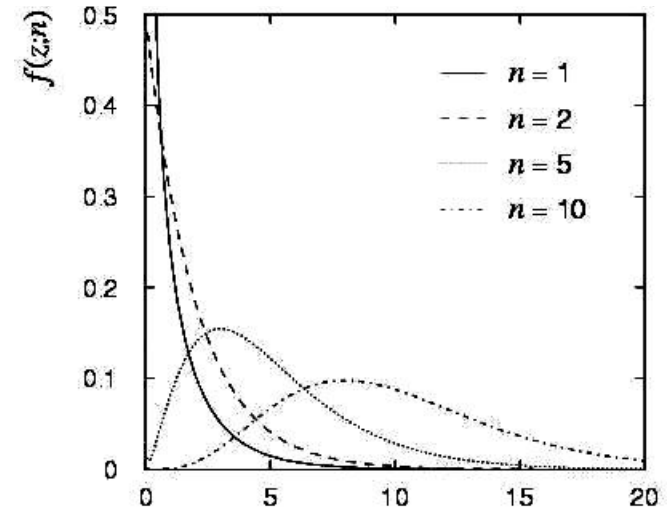
Chi-Quadrat-(χ^2)-Verteilung

Die Chi-Quadrat-WDF für kontinuierliche ZV z ($z \geq 0$) ist definiert als:

$$f(z; n) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}$$

$n = 1, 2, \dots$ = Anzahl der Freiheitsgrade "FG"

$$E[z] = n, \quad V[z] = 2n.$$



Für unabhängige Gauss-ZV x_i , $i = 1, \dots, n$, mit Mittelwerten μ_i , Varianzen σ_i^2 ,

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \text{folgt einer } \chi^2 \text{ WDF mit } n \text{ FG.}$$

Beispiel: Test der Güte der Anpassung im besonderen im Zusammenhang mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Chi-Quadrat- (χ^2) -Verteilung (2)

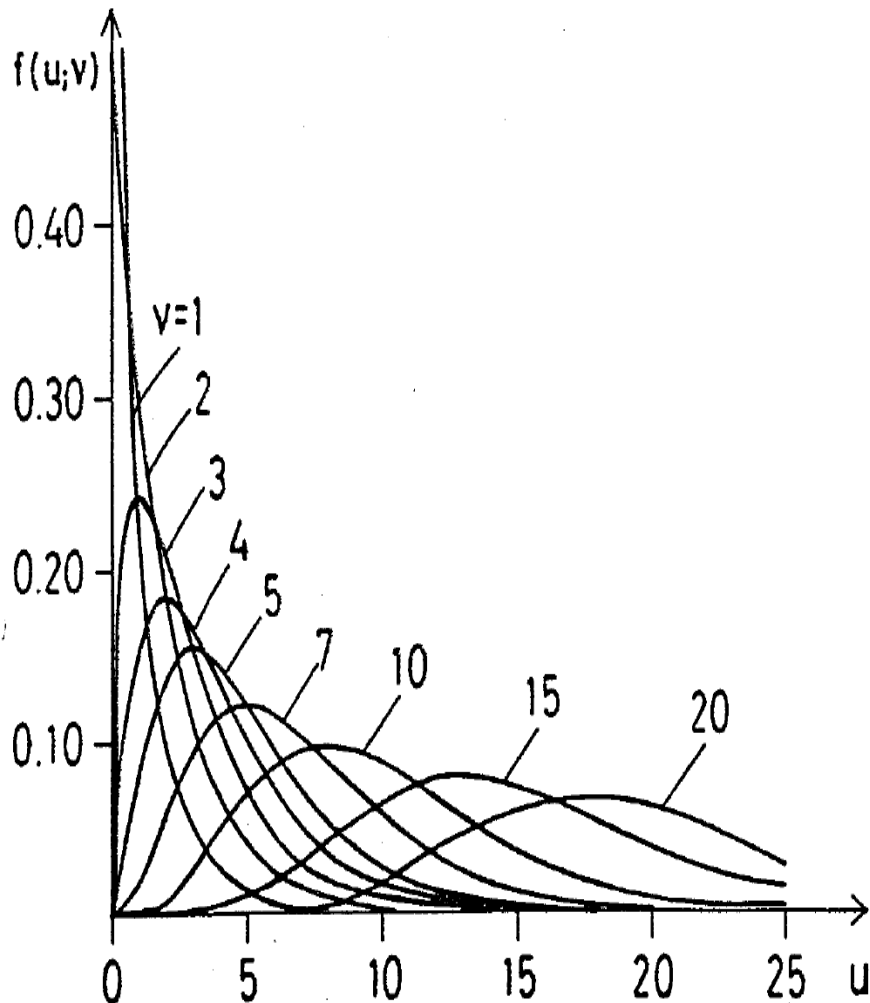


Fig. 5.1. The chi-square distribution for different degrees of freedom v .

Schiefte = $\sqrt{8/n}$

Wölbung = $12/n$

$n \leq 2$: monoton fallend

$n > 2$: Modalwert bei $n-2$

$n \rightarrow$ unendlich WDF gegen Gauss-WDF

Seien u_i χ^2 -ZV mit n_i Freiheitsgraden
Dann ist $u = \sum_i u_i$ verteilt gemäß
Chi-Quadrat-WDF mit $n = \sum_i n_i$
Freiheitsgraden

Stichprobenvarianz $\sigma_S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
verteilt gemäß Chi-Quadrat-WDF
mit $(n-1)$ Freiheitsgraden

Frodesen et al.

Quantile der Chi-Quadrat- (χ^2) -Verteilung

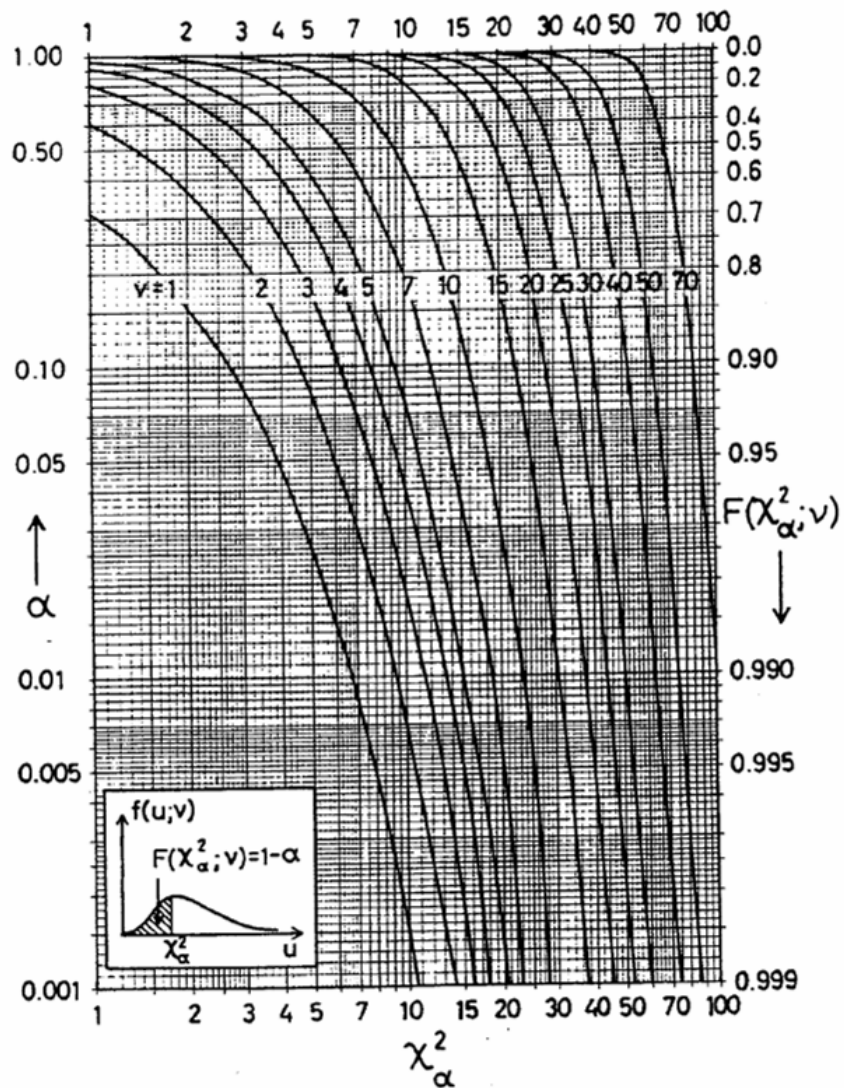
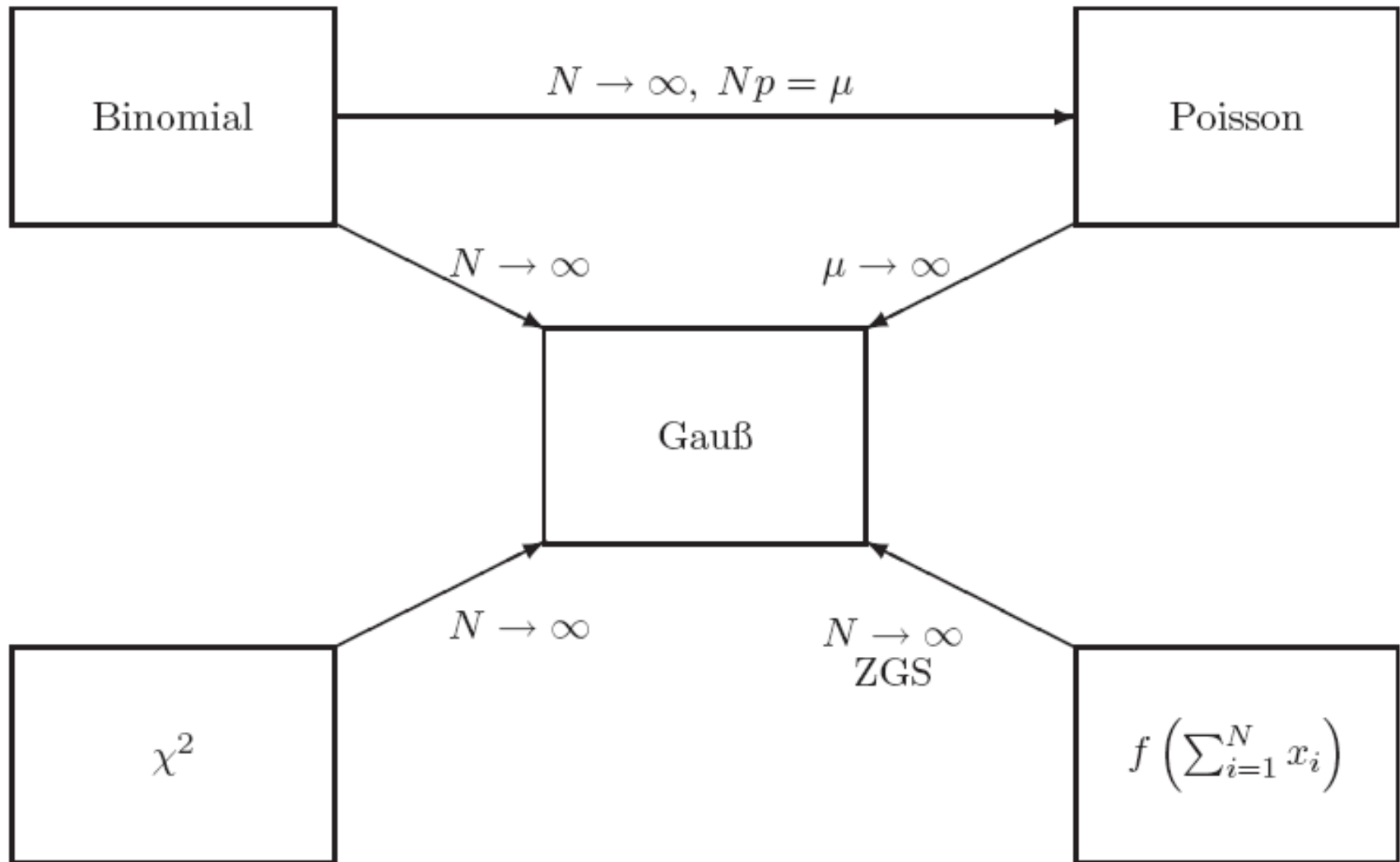


Fig. 5.2. Probability contents of the chi-square distribution.

Frodesen et al.

Zusammenhang zwischen WDFs

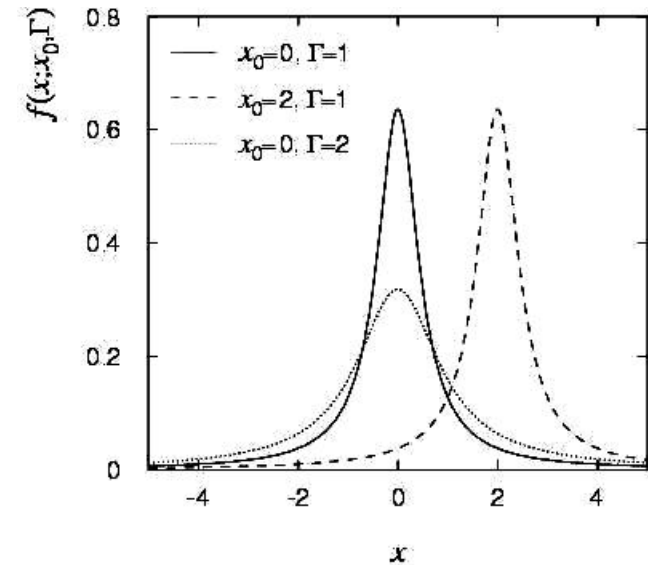


Cauchy/Breit-Wigner-Verteilung

Die Breit-Wigner WDF für eine kontinuierliche ZV x ist definiert als

$$f(x; \Gamma, x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x - x_0)^2}$$

($\Gamma = 2, x_0 = 0$ ist die Cauchy-WDF)



$E[x]$ nicht wohl definiert, $V[x] \rightarrow \infty$.

x_0 = Modalwert (wahrscheinlichster Wert/probable value)

Γ = volle Breite auf halber Höhe

Beispiele: Masse einer Teilchenresonanz z.B. $\rho, K^*, \phi^0, Z, H, \dots$

Γ = Zerfallsbreite/Zerfallsrate (Inverse der mittleren Lebensdauer)

Landau-Verteilung

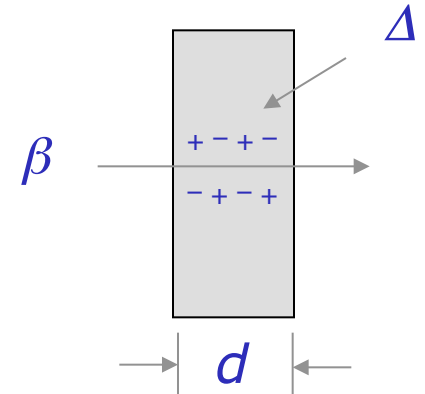
Der Energieverlust Δ eines geladenen Teilchens mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$, welches eine Materialschicht der Dicke d durchquert, folgt der Landau-Verteilung.

$$f(\Delta; \beta) = \frac{1}{\xi} \phi(\lambda) ,$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u \ln u - \lambda u) \sin \pi u \, du ,$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi} \left[\Delta - \xi \left(\ln \frac{\xi}{\epsilon'} + 1 - \gamma_E \right) \right] ,$$

$$\xi = \frac{2\pi N_A e^4 z^2 \rho \sum Z}{m_e c^2 \sum A} \frac{d}{\beta^2} , \quad \epsilon' = \frac{I^2 \exp \beta^2}{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2} .$$



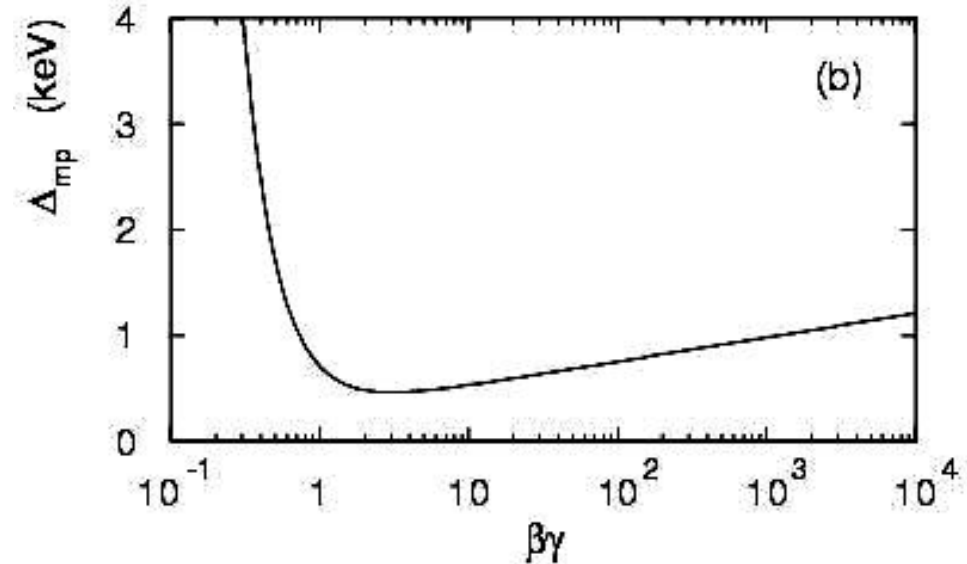
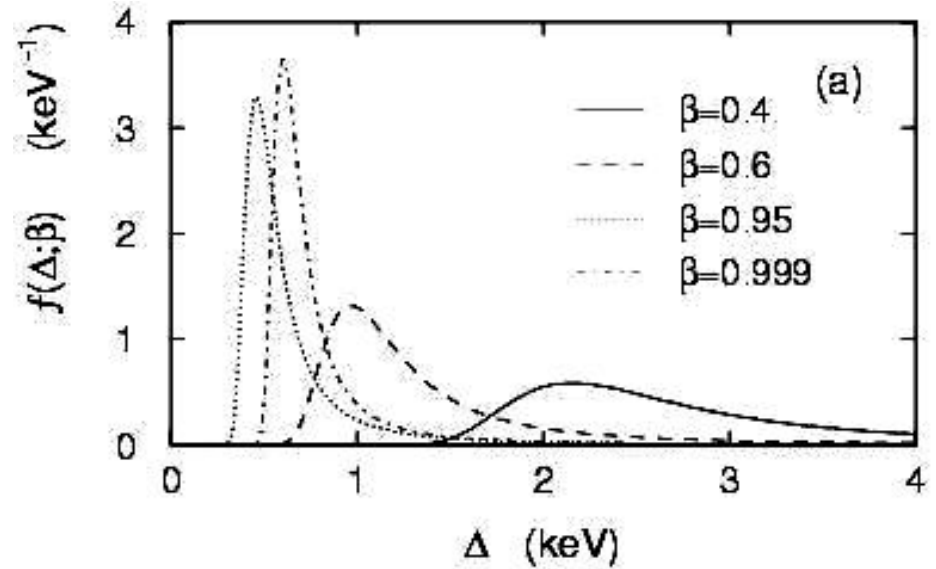
L. Landau, J. Phys. USSR **8** (1944) 201; see also

W. Allison and J. Cobb, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **30** (1980) 253.

Landau-Verteilung (2)

Lange “Landau-Ausläufer”
→ alle Momente ∞

Modalwert sensitiv
auf Geschwindigkeit β ,
→ Teilchenidentifikation



Tabellarische Übersicht

Name	Definitionsbereich	Wahrscheinlichkeits(dichte)	$\langle x \rangle = E[x]$	$\sigma_x = \sqrt{V[x]}$	charakter. Funktion
Binomial	$\{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$	$f(x; p, N) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}$	Np	$\sqrt{Np(1-p)}$	$(p(\exp(ik) - 1) + 1)^N$
Poisson	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$	λ	$\sqrt{\lambda}$	$\exp(\lambda(\exp(ik) - 1))$
Gleichvert.	$[a, b]$	$f(x; a, b) = \frac{1}{(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$	$\frac{\exp(ibk) - \exp(iak)}{(b-a)ik}$
Gauß	$[-\infty, \infty]$	$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ	$\exp(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2)$
Chi-Quadrat	$[0, \infty]$	$f(x; n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-\frac{x}{2})$	n	$2n$	$(1 - 2ik)^{-n/2}$
Exponentiell	$[0, \infty]$	$f(x; \xi) = \frac{1}{\xi} \exp(-x/\xi)$	ξ	ξ	$\frac{1}{1-ik\xi}$
Cauchy	$[-\infty, \infty]$	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	(0)	∞	$\exp(- k)$
Landau	$[0, \infty]$	$f(x; \beta) = \dots$	∞	∞	