Experimentelle Methoden der Teilchenphysik

Sommersemester 2011/2012

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Markus Schumacher

Physikalisches Institut, Westbau, 2. OG Raum 008

Telefon 07621 203 7612

E-Mail: Markus.Schumacher@physik.uni-freiburg.de

Kapitel 11: Die MC-Methode

http://terascale.physik.uni-freiburg.de/lehre/Sommersemester%202012

Die Monte-Carlo-(MC)-Methode

MC-Methode ist eine numerische Technik zur Bestimmung von

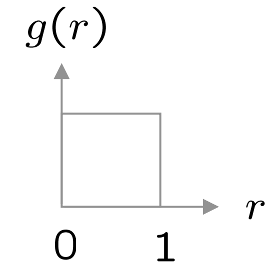
- Wahrscheinlichkeitsdichtefuntionen
- Transformation von Zufallsvariablen
- Bestimmung von Integralen
- Erwartunsgwerte
- Faltungen

mit Hilfe von Zufallszahlen

Anwendungen:
- Generierung von Ereignissen/Messungen gemäß eines theoretischen Modells
- Simulation des Ansprechverhaltens eines Nachweisapparates/ einer Messapratur
- ….

Die Monte-Carlo-(MC)-Methode (2)

Die einzelnen Schritte sind:



(1) Generiere eine Sequenz von Zufallszahlen
$r_1, r_2, \ldots, r_m$ gemäß Gleichverteilung im Intervall [0, 1].

(2) Verwende diese um eine weitere Sequenz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu erzeugen, die gemäß einer vorgegebenen WDF $f(x)$ verteilt sind. (x kann Vektor sein).

(3) Verwende x_i Werte um Eigenschaften von $f(x)$ zu bestimmen,
z.B. Erwartunsgwerte oder
Anteil x Werten mit $a < x < b$ ergibt

→ MC-Berechung = Integration (zumindest formal) $\int_a^b f(x)\,dx$.

MC generierte Werte = “simulierte Daten”

→ oft verwendet um Gültigkeit statistischer Methoden zu testen

Besondern nützlich bei:- vieldimensionalen f(x)
- komplizierten Unterräumen des “x”^{n}

Die Transformationsmethode

Anwendung der Transformationsmethode für Zufallsvariablen

bisher:	$f(x)$ WDF für x gegeben	$a(x)$ Funktion gegeben	$\rightarrow$	$g(a)$ WDF für a gesucht
jetzt:	$g(r)$ Gleichverteilung in r gegeben	$x(r)$ Transformation gesucht	$\rightarrow$	$f(x)$ WDF für x gegeben

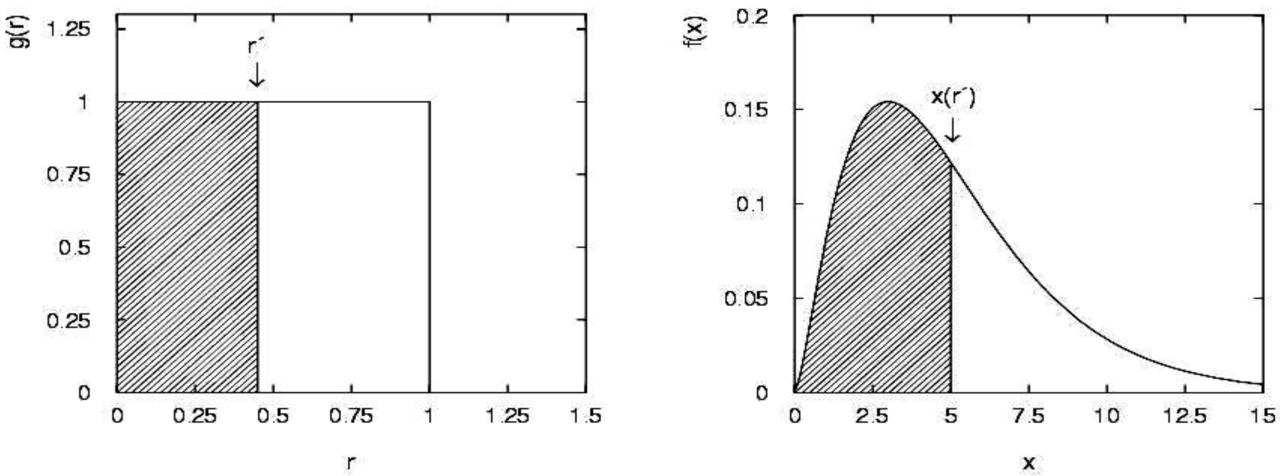
Ziel: gegeben Sequenz r_1, r_2,..., r_n gleichförmig in [0, 1], erzeuge x_1, x_2,..., x_n die $f(x)$ folgen durch Auffinden einer geigneten Transformation $x(r)$.

Die Transformationsmethode (2)

Verlange: Wkt, dass r in [r,r+dr] = g(r)dr
= Wkt., dass x in [x(r), x(r)+dx(r)] = f(x) dx

Oder äquivalent: $P(r \leq r') = P(x \leq x(r'))$

$$\int_{-\infty}^{r'} g(r)\, dr = r' = \int_{-\infty}^{x(r')} f(x')\, dx' = F(x(r'))$$



Da g(r)=1 gilt: $F(x) = r$ d.h. $x = F^{-1}(r)$

Benötigt: Kumulativfunktion analytisch bestimmbar und invertierbar.

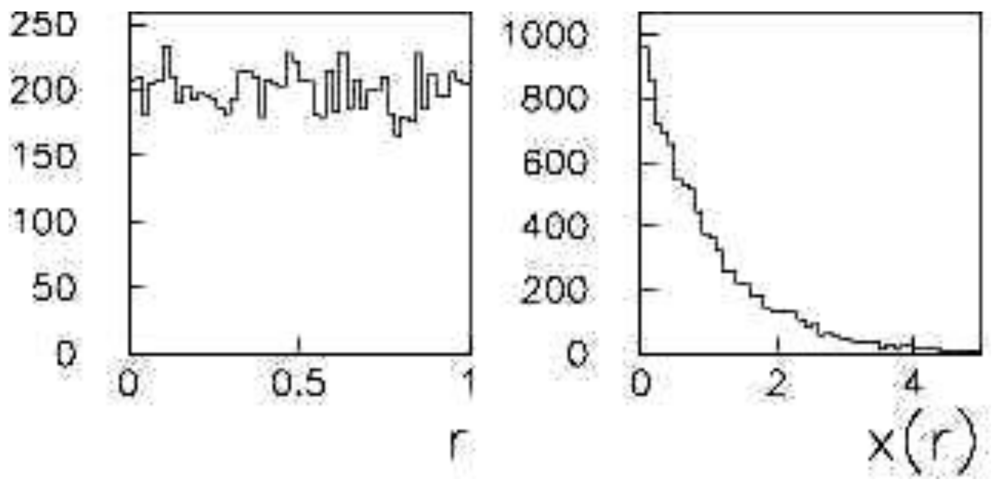
Beispiel für die Transformationsmethode

Exponential-WDF: $f(x;\xi) = \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi} \quad (x \geq 0)$

Setze $\int_0^x \frac{1}{\xi} e^{-x'/\xi}\, dx' = r$ und löse nach $x\,(r)$ auf.

$$-e^{(-x/\xi)} + 1 = r$$

$\rightarrow \; x(r) = -\xi \ln(1-r) \qquad (\, x(r) = -\xi \ln r$ geht auch)



Vorteil: 100% Effizienz, d.h. aus jedem r_i wird ein x_i erzeugt.

Die Transformationsmethode (Zsfg.)

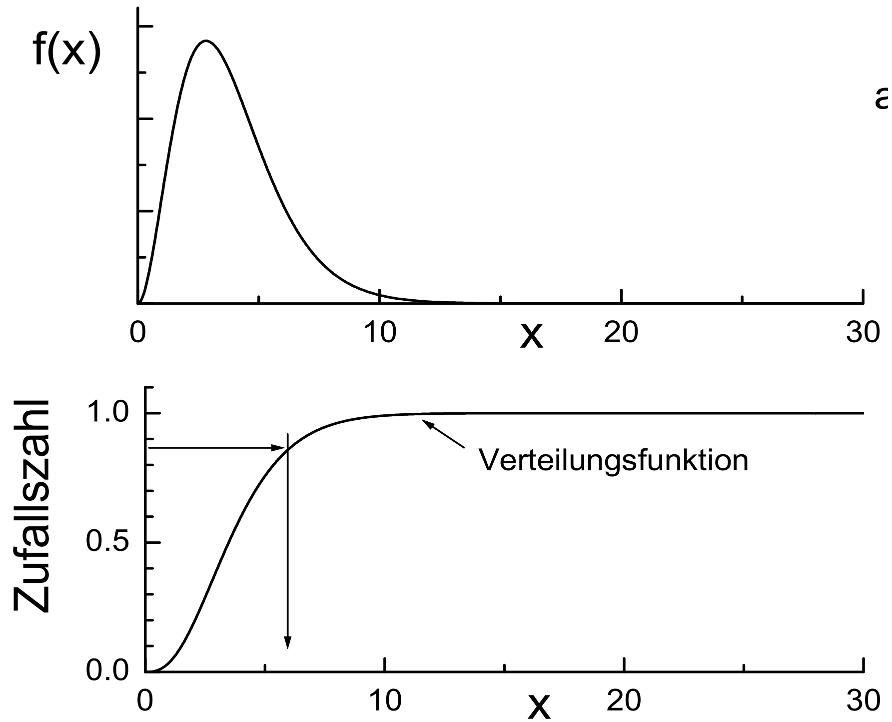
Aus r gleichförmig in [0,1] erzeuge x, die WDF f(x) folgt, gemäß:

$$f(x)\mathrm{d}x = u(r)\mathrm{d}r,$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x')\mathrm{d}x' = \int_{0}^{r(x)} u(r')\mathrm{d}r' = r(x)$$

$$F(x) = r,$$

$$x(r) = F^{-1}(r)\,.$$



Voraussetzung: Kumulativverteilung analytisch integrierbar u. invertierbar

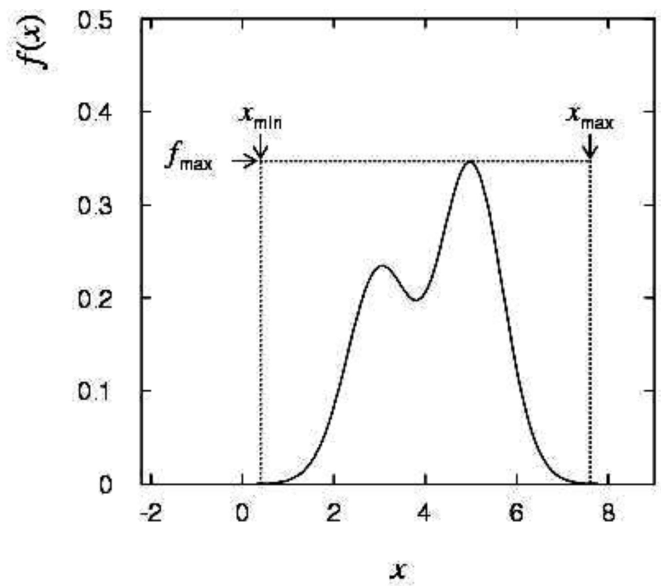
Effizienz des Verfahrens 100% (jedes r erzeugt ein x)

Weitere Beispiele für die Transformationsmethode

Wahrscheinlichkeitsdichte	Wertebereich	Algorithmus
$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$[a, b[$	$x = (b-a) \cdot z + a$
$f(x) = 2x$	$[0, 1[$	$x = \max(z_1, z_2)$ or $x = \sqrt{z}$
$f(x) \sim x^{r-1}$	$[a, b[$	$x = [(b^r - a^r) \cdot z + a^r]^{1/r}$
$f(x) \sim \frac{1}{x}$	$[a, b[$	$a \cdot (b/a)^z$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]1, \infty]$	$x = 1/z$
$f(x) = \frac{1}{k} e^{-x/k}$	$]0, \infty]$	$x = -k \ln z$
$f(x) = x e^{-x}$	$]0, \infty]$	$x = -\ln(z_1 \cdot z_2)$
$f(x) = -\ln x$	$[0, 1[$	$x = z_1 \cdot z_2$
Gauss: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$[-\infty, \infty]$	$x = \sigma \sqrt{-\ln z_1^2} \cdot \cos(2\pi z_2)$
Breit–Wigner: $f(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x-\mu)^2 + (\Gamma/2)^2}$	$[-\infty, \infty]$	$x = [\tan \pi(z - 0.5)] \cdot \Gamma/2 + \mu$

Die von-Neumannsche-Zurückweisungsmethode

Schliesse WDF in Box ein



(1) Generiere Zufallszahl x, gleichförmig in [x_{min}, x_{max}], i.e.

$$x = x_{\mathrm{min}} + r_1(x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}) \ ,$$ r_1 ist gleichverteilt in [0,1].

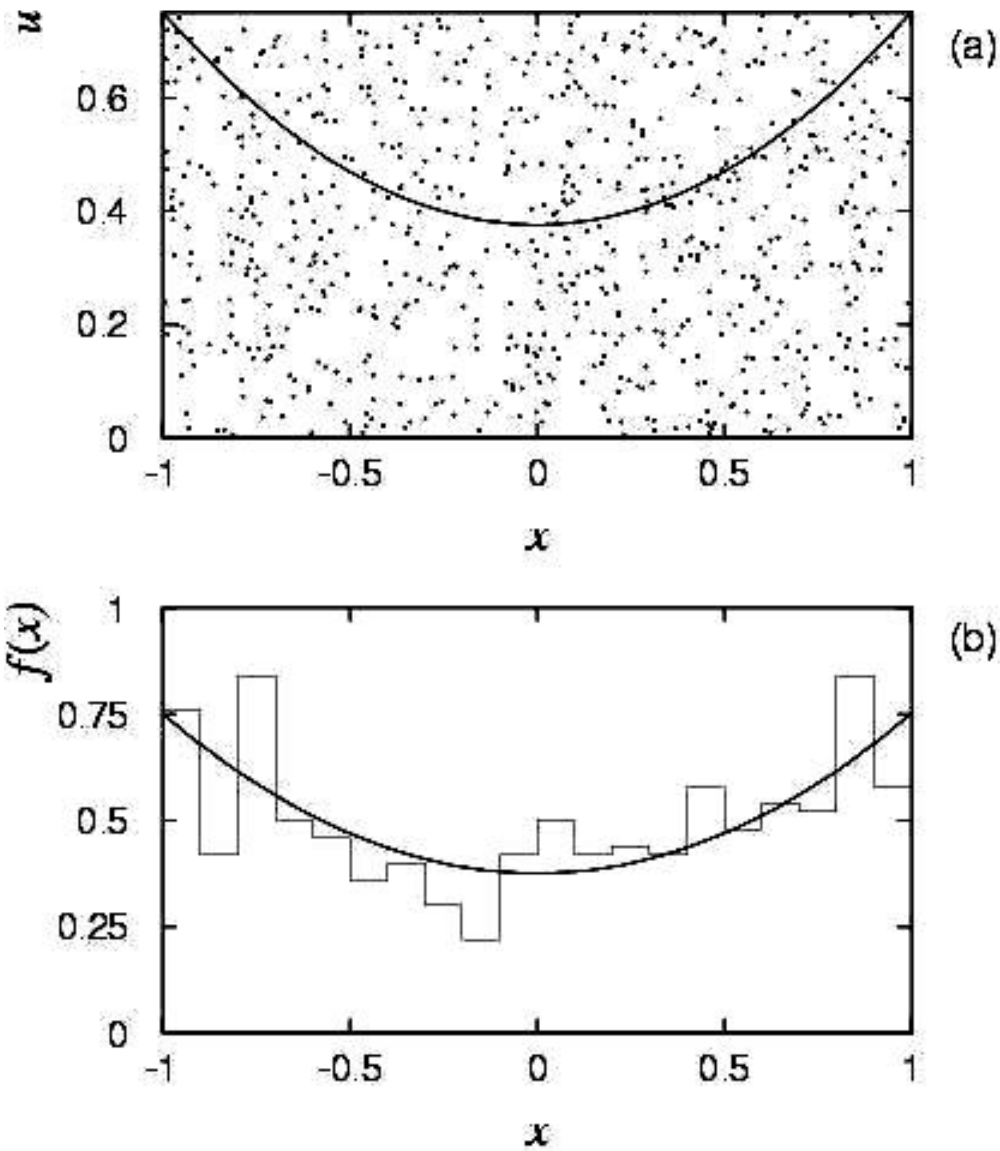
(2) Generiere eine 2te unabhängige Zufallszahl u gleichverteilt zwischen 0 und f_{max}, i.e. $u = r_2 f_{\mathrm{max}}$.

(3) Wenn $u < f(x)$, dann akzeptiere x. Wenn nicht, verwerfe x and versuche es erneut.

Die von-Neumannsche-Zurückweisungsmethode

$$f(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2)$$

$$(-1 \leq x \leq 1)$$



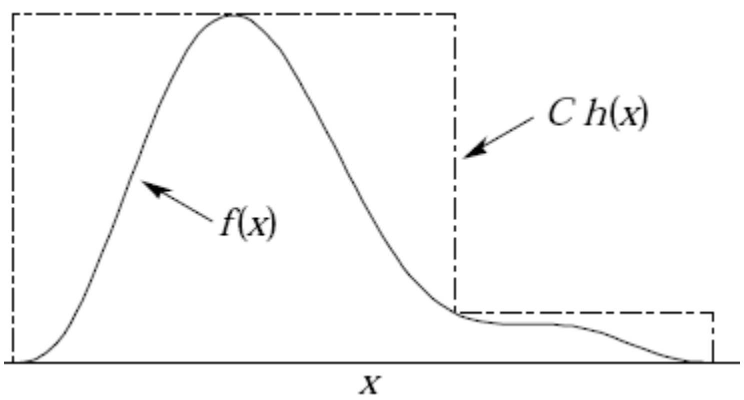
Wenn Punkt unterhalb der Kurve, dann behalte ihn und Fülle *x*-Wert in Histogramm.

Effiizienzerhöhung für Zurückweisungmethode

Der Anteil akzeptierter Punkte ist gleich dem Verhältnis des Intergrals über f(X) zur Fläche der Box.

Für Verteilungen mit großen “Spitzen” mag die Effizienz des Algorithmus sehr gering werden,

Verbesserung: Durch Einhüllen der WDF $f(x)$ in einer Kurve $C\,h(x)$ die sich an f(x) anschmiegt. Für WDF $h(x)$ können Zufallszahlen nach Transformationsmethode erzeugt werden. Eifanchstes Beispiel: Stufenfunktion

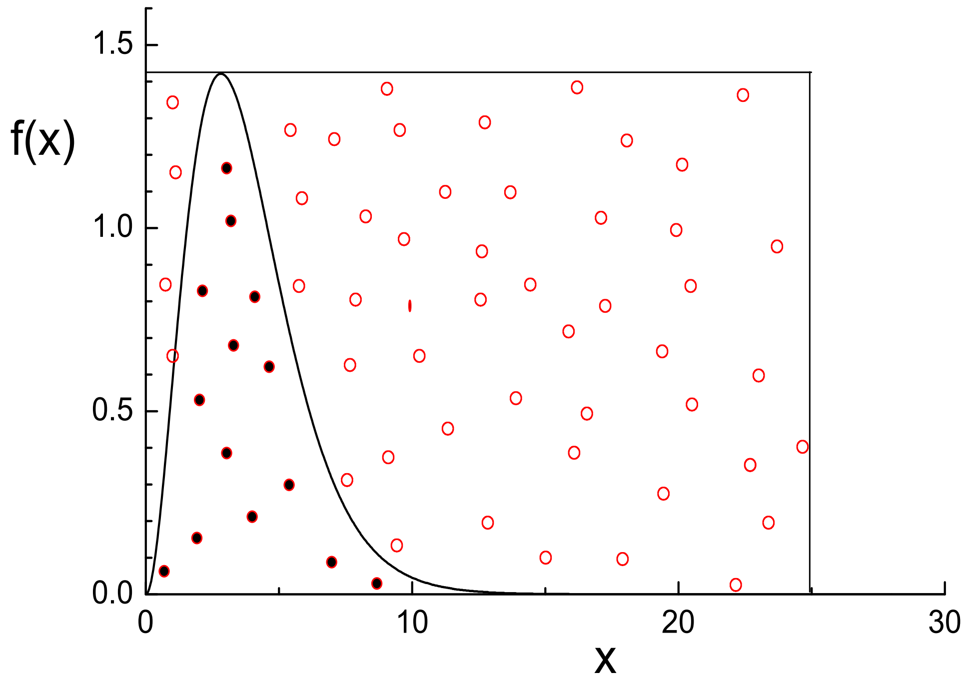


Erzeuge Punkte gleichverteilt in $C\,h(x)$.
Wenn Punktpaar unter $f(x)$, behalte x.

Effiizienzerhöhung für Zurückweisungmethode

Einfaches Beispiel:
Plankspektrum

$$f(x) = c\frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}$$



Effizienz: hier ca. 10%

Weiteres Problem: Wertebereich x geht bis unendlich
Box wird nur bis x_{max} gewürfelt.

Majorantenmethode

Suche geeignete Funktion (Majorante) $m \geq f$ für alle x

Mit invertierbarer Stammfuktion M(x) $M(x) = \int_{-\infty}^{x} m(x')\mathrm{d}x'$

Zufallszahlen gemäß m(x) werden über erzeugt $x = M^{-1}(r)$

Erzeuge zweite Zufallszahl in Abhängigkeit von x im Bereich: null und $m(x)$

Behalte (verwerfe) diese wenn sie ≤ (>) f(x) ist

Bruchteil $[m(x) - f(x)]/f(x)$

der zweiten Zufallszahlen wird lokal verworfen

Besonders gut, wenn Majorante m(x) nahe an f(x) → große Effizienz
Vorteil: Generierung von Verteilungen die bis “unendlich gehen”

Majorantenmethode: Beispiel

Zielfunktion: $f(x) = c(\mathrm{e}^{-0.2x} \sin^2 x) \quad \text{für} \quad 0 < x < \infty$

Geeignete Majorante: $m(x) = c\,\mathrm{e}^{-0.2x}$.

Bedingung für Kumulativfkt.:

$$r = \int_0^x \frac{1}{0.2} \mathrm{e}^{-0.2x'} \mathrm{d}x' = 1 - \mathrm{e}^{-0.2x} .$$

Transformation von gleichverteilten r auf x gemäß Majorante m(x)

$$x = -\frac{1}{0.2} \ln(1 - r_1)$$

Würfele zweite Zufallszahl r_2 und bilde Produkt: $r_2\, m(x)$

Akzeptanz/Zurückweisung gemäß:

$$\text{für } r_2 < \sin^2 x \quad \rightarrow \quad \text{behalte } x,$$
$$\text{für } r_2 > \sin^2 x \quad \rightarrow \quad \text{verwerfe } x$$