Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Sommersemester 2009

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung IV

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

20.5.2009

Computerübung

Aufgabe 23 *Zufallsgenerator für einen Teilchenzerfall*

In dieser Übung werden wir die Transformationsmethode anwenden, um Zufallszahlen $\vec{x}$ zu erzeugen, die gemäß der Exponentialverteilung

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{x}{\tau}\right) \tag{1}$$

verteilt sind. Die Variablen $\vec{x}$ könnten beispielsweise die Zerfallszeiten eines Teilchens mit Lebensdauer τ repräsentieren.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Erzeugen Sie gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1, indem Sie den in ROOT implementierten Zufallsgenerator `TRandom3`

```
TRandom3::Uniform(Double_t x1, Double_t x2)
```

benutzen.

(ii) Benutzen Sie die Transformationsmethode, um die gleichverteilten Zufallszahlen $\vec{r}$ in exponentiell verteilte Zufallszahlen umzuwandeln. Die Transformationsfunktion lautet

$$x(r) = -\tau \ln r. \tag{2}$$

(iii) Füllen Sie die erzeugten Werte für $\vec{x}$ und $\vec{r}$ in Histogramme und ausserdem in einen ROOT-Tree. Ein Beispiel dafür, wie man Variablen in einen `TTree` einfüllt, ist im Makro `ExpGen_i.C` enthalten.

(iv) Erzeugen Sie exponentiell verteilte Zufallsvariablen für ein festes τ ($0 \leq \tau \leq 5$) mit einem Stichprobenumfang von 100, aber lassen Sie niemanden sonst den benutzten Wert für τ wissen!

In Aufgabe 25 sollten Sie Ihre erzeugte ROOT-Datei mit einem anderen Übungsteilnehmer tauschen, und versuchen herauszufinden, welchen Wert von τ der jeweils andere benutzt hat.

Aufgabe 24 *Erzeugung von $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$–Ereignissen mit der „Hit and Miss“-Methode*

In dieser Übung werden wir die „Hit and Miss“-Methode benutzen, um Vierervektoren von Myonen in $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$–Ereignissen zu simulieren. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für solche Ereignisse ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\phi} \propto 1 + \alpha\cos\theta + \beta\cos^2\theta, \tag{3}$$

wobei die Winkel θ und ϕ nach Konvention diejenigen des μ^+ sind. Der Winkel θ wird bezüglich der z-Achse gemessen, der Winkel ϕ bezüglich der x-Achse.

Die zu berücksichtigenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen lauten also

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1+\alpha x+\beta x^2}{2+\frac{2\beta}{3}}, \tag{4}$$

$$\text{und} \quad f(y) = \frac{1}{2\pi}. \tag{5}$$

Gehen Sie wie folgt vor, um simulierte Streuereignisse zu generieren (Ein Beispiel dafür findet sich im ROOT-Makro `EvGen_i.C`.):

(i) Stellen Sie zwei eindimensionale Funktionen vom Typ `TF1` für $f(x;\alpha,\beta)$, mit $\alpha = 0.1$ und $\beta = 1.0$, und $f(\phi)$ bereit.

(ii) Ermitteln Sie das Maximum von $f(x;\alpha,\beta)$, indem Sie die Methode von `TF1`

```
TF1::GetMaximum(Double_t xmin, Double_t xmax)
```

verwenden.

(iii) Erzeugen Sie zwei gleichverteilte Zufallszahlen in den Intervallen $-1 \leq x_i \leq 1$ bzw. $0 \leq y_i \leq f_{max}$.

(iv) Akzeptieren Sie ein Ereignis, falls $y_i < f(x_i;\alpha,\beta)$. Benutzen Sie dann den Wert x_i um:

- ein Histogramm mit den Werten von x_i zu füllen,
- die Komponenten der Vierervektoren (E,p_x,p_y,p_z) jedes der beiden Myonen zu berechnen und diese in einen `TTree` zu füllen. Benutzen Sie die LEP Schwerpunktsenergie $E_{SP} = 91.2$ GeV, demnach hat jedes der beiden Myonen $E = 45.6$ GeV.

Verwerfen Sie das Ereignis, falls $y_i > f(x_i;\alpha,\beta)$.

(v) Wie groß ist die Effizienz dieses Monte-Carlo-Generators?

(vi) Stellen Sie sicher, dass Sie die erzeugte ROOT-Datei mit 10,000 Ereignissen abspeichern. Sie wird möglicherweise in den kommenden Übungen noch benutzt werden.

Aufgabe 25 *Maximum-Likelihood-Anpassung an exponentiell verteilte Daten*

In Aufgabe 23 wurde eine ROOT-Datei mit simulierten Zerfallszeiten erzeugt.

In dieser Übung sollen Sie versuchen, herauszufinden, welchen Wert der Zerfallskonstante τ ein anderer Übungsteilnehmer benutzt hat, um diese Datei zu erzeugen.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Lassen Sie sich von einem anderen Übungsteilnehmer die erzeugte Datei geben und öffnen diese in ROOT. Ein Beispiel dafür findet sich im ROOT-Makro `ExpLike_i.C`.

(ii) Berechnen Sie für einen sinnvollen Wertebereich der Zerfallskonstante τ den Logarithmus der Likelihood für die Exponentialverteilung und die in Aufgabe 23 erzerzeugte Meßreihe:

$$\ln \mathcal{L}(\tau_j) = \sum_{i=1}^{N} \left[\ln\left(\frac{1}{\tau_j}\right) - \frac{x_i}{\tau_j} \right] \tag{6}$$

und stellen Sie sie mittels eines `TGraph` graphisch dar, in dem $\ln \mathcal{L}(\tau_j)$ gegen τ_j aufgetragen wird.

(iii) Ermitteln Sie aus der erzeugten Abbildung eine Abschätzung für die Zerfallskonstante, $\hat{\tau}$, und deren Standardabweichung $\sigma_{\hat{\tau}}$ darauf. Vegleichen Sie den Wert mit dem Ergebnis, das aus der “Minimum Variance Bound” Methode ($\hat{V}(\hat{\tau}) = \frac{\hat{\tau}^2}{n}$) folgt.

(iv) Erzeugen Sie als nächstes eine eindimensionale Exponentialverteilung `TF1` und benutzen Sie die in ROOT integrierte Anpassungsroutine, um eine Maximum-Likelihood-Anpassung an die Daten mittels des Kommandos

```
tree->UnbinnedFit("expFunk", "exp", "", "V");
```

durchzuführen. Die Option `"exp"` steht für den Namen der Zufallsvariablen im `TTree`. Die Option `"V"` steht für detaillierte Ausgabe. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das aus dem Minos-Fit (Option `"E"`) folgt.

(v) Sollten Sie ein wenig mehr Zeit zur Verfügung haben, benutzen Sie die „Monte-Carlo“-Methode, um den Mittelwert des Schätzwertes der Zerfallskonstante $\overline{\hat{\tau}}$ und dessen Standardabweichung $s_{\hat{\tau}}$ zu bestimmen.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Nehmen Sie den Schätzwert $\hat{\tau}$ aus Unteraufgabe (iv).
- Generieren Sie eine weitere Stichprobe von 100 exponentiell verteilten Zufallszahlen mit $\tau' = \hat{\tau}$.
- Ermitteln Sie unter Verwendung der ROOT-Anpassungsroutine den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}'$ für diese neue Stichprobe.
- Wiederholen Sie diese Schritte 1000 mal und füllen Sie die Schätzwerte für die Zerfallskonstante aus jedem Schritt in ein Histogramm.
- Lesen Sie aus diesem Histogramm die Werte für $\overline{\hat{\tau}}$ und $s_{\hat{\tau}}$ ab.