Kern- und Teilchenphysik
Übung II

Prof. Markus Schumacher, Dr. Henrik Nilsen

4. - 7.5.2010

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 7 *Formfaktor und Kernladungsverteilung I*

Der differentielle Mott-Wirkungsquerschnitt beschreibt die Coulomb-Streuung eines punktförmigen, relativistischen Projektils mit Spin $\frac{1}{2}$ an einem punktförmigen Streuzentrum. Gemessene differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an Atomkernen weichen von dem Mott Wirkungsquerschnitt aufgrund der endlichen Größe des Atomkerns ab. Diese Abweichung wird durch den Formfaktor des Kerns ($F(|\vec{q}|^2)$) beschrieben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{gemessen}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(|\vec{q}|^2)|. \tag{1}$$

Unter gewissen Annahmen (vernachlässigbarer Rückstoß des Kerns; niedrigste Näherung in der Störungsreihe, d.h. Bornsche Näherung) ist der Formfaktor die Fourier-Transformierte der Ladungsdichte ($\rho(\vec{r})$):

$$F(|\vec{q}|^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass für einen Kern mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung ($\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, mit $r = |\vec{r}|$) folgender Zusammenhang besteht:

$$F(|\vec{q}|^2) = \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \int \rho(r) \sin(|\vec{q}|r) r dr \tag{3}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der Taylor-Entwicklung von $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ und wechseln Sie zu Kugelkoordinaten durch $\int d^3\vec{r} \to \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} r^2 dr d(\cos\theta) d\phi$.

Aufgabe 8 *Bethe-Weizsäcker-Massenformel: Coulomb Term*

Der Coulomb Term in der Bethe-Weizsäcker-Massenformel beschreibt die Energie, die im elektromagnetischen Feld der Protonen im Atomkern gespeichert ist. Da $E = mc^2$ leistet diese Energie des Feldes einen positiven Beitrag zur Masse des Atomkerns. In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass der Coulomb Term eines Kerns mit A Nukleonen, wovon Z Protonen sind, gegeben ist als $a_c Z^2/A^{1/3}$, wobei a_c ein numerischer Parameter mit Einheit $[MeV]$ ist. Dazu berechnen wir die gespeicherte Energie in einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Ladungsdichte $\rho = \frac{Z}{4\pi R^3/3}$. Betrachten Sie die Kugel als aus vielen, dünnen Schichten mit Dicke dr bestehend (siehe Abb. 2).

(i) Zeigen Sie, dass die benötigte Energie (in natürlichen Einheiten) um die Ladung in einer solchen Schicht von einen Radius $r' = \infty$ bis $r' = r$ zu bringen, gegeben ist als

$$dE_C = dW_C = \int_{r'=\infty}^{r'=r} F dr = \alpha \cdot (4\pi r^2 \rho dr) \cdot (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho) \cdot \frac{1}{r}. \tag{4}$$

(ii) Integrieren Sie über $r' = 0$ bis $r' = R$ (i.e. über "alle" dünnen Schichten in der Kugel) und zeigen Sie dadurch, dass der Coulomb Term in der Bethe-Weizsäcker-Massenformel gegeben ist als

$$E_C = \frac{3}{5}\alpha\frac{Z^2}{R}, \tag{5}$$

und dass $E_C \propto Z^2 A^{-1/3}$ (unter der Annahme, dass nicht nur die Ladungsverteilung, sondern auch die Massenverteilung, homogen ist). Achtung: in der Literatur ist der Coulomb Term auch ab und zu als $Z(Z-1)A^{-1/3}$ definiert.

Hausaufgaben

Aufgabe 9 *Formfaktor und Kernladungsverteilung II* **4 Punkte**

Wir nehmen an, dass die Ladungsverteilung eines Kern gegeben ist als die einer homogenen Kugel, nämlich:

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi R^3}, \qquad r \leq R, \tag{6}$$
$$= 0, \qquad r > R. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$F(|\vec{q}|^2) = 3\left(\frac{\sin(qr) - qr\cos(qr)}{(qr)^3}\right), \tag{8}$$

und dass diese Funktion Nullstellen hat für $\tan(qr) = qr$. Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus der Aufgabe "Formfaktor und Kernladungsverteilung I".

Aufgabe 10 *Bestimmung des Kernradius durch Streuung* **6 Punkte**

Abb. 1 zeigt Messungen des Wirkungsquerschnittes für Streuung von Elektronen mit einer Energie von 420 MeV an C^{12} Atomen, zusammen mit 2 angepassten, theoretischen Vorhersagen (siehe Bildtext).

(i) Bestimmen Sie mittels Gl. 8 eine Abschätzung des Radius der C^{12} Atomkerne. Hinweis: Der erste Nullpunkt von Gl. 8 tritt bei $qr \approx 4.5$ auf. Der Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel, θ, und dem Impulsübertrag, $|\vec{q}|$, ist, wie in der Vorlesung gezeigt, gegeben als $|\vec{q}| = 2\,|\vec{p}|\sin(\theta/2)$.

(ii) Was ist die Dichte eines C^{12} Atomkerns in der Einheit kg/m^3? Wie gross müsste der Radius einer Kugel mit dieser Dichte sein, damit die Kugel die Masse des Mondes besitzen würde ($m_{\text{Mond}} \approx 7 \cdot 10^{22} kg$)? Hinweis: Der Atommasse von C^{12} ist definiert als $12u$, wobei u die atomare Masseneinheit ist, mit $1u = 931$ MeV. Ein Elektron-Volt ist gleich $1.602 * 10^{-19} J$. Skalieren Sie J mit $1/c$ um von natürlichen Einheiten $[masse] = eV$ auf normale Einheiten, also $[masse] = kg$, zu kommen.

Aufgabe 11 *Bestimmung des Kernradius durch Massenspektroskopie* **3 Punkte**

In einer früheren Aufgabe wurde der Kernradius von Kohlenstoff anhand von Messdaten aus einem Streuuexperiment abgeschätzt. In dieser Aufgabe wird der Kernadius mittels Massenspektroskopie abgeschätzt.

Spiegelkerne sind Kerne mit der selben Massenzahl (A) aber mit vertauschter Neutronen- (N) und Protonenzahl (Z). Wenn man annimmt, dass die Protonen gleichmäßig im Kernvolumen verteilt sind, haben sie, wie in einer früheren Aufgabe gezeigt, eine elektrostatische Energie von

$$E_C = \frac{3}{5}\alpha\frac{Z^2}{R} \tag{9}$$

wobei R der Radius des Kerns ist und $\alpha = 1/137$. Berechnen Sie R für die beiden Spiegelkerne N^{15} und O^{15} unter der Annahme, (i) dass die Differenz der Bindungsenergien nur durch die Coulomb-Wechselwirkung entsteht, und (ii) dass die zwei Atomkerne den gleichen Radius haben. Die Differenz der Masse, bestimmt durch Massenspektroskopie, beträgt

$$\Delta m = m(O^{15}) - m(N^{15}) = 2.754 \text{ MeV}. \tag{10}$$

Hinweis zur Gl. 9: Um von natürlichen auf SI Einheiten zu kommen muss man E_C mit $1 = \hbar c = 197$ MeV·fm multiplizieren, wobei das erste "=" für natürliche Einheiten gültig ist, und das zweite für SI Einheiten gilt.

Aufgabe 12 *Bindungsenergie, Spaltung und Fusion* **7 Punkte**

Zwei Arten von Kernreaktionen, die Spaltung und die Fusion, sind von besonderer praktischer Bedeutung. Bei der Spaltung von U^{235} beispielsweise wird der Urankern durch Einfang eines Neutrons angeregt und zerfällt nachfolgend in zwei ungefähr massegleiche Bruchstücke. Eine typische Reaktion ist

$$n + U^{A=235}_{Z=92} \rightarrow Kr^{92}_{36} + Ba^{142}_{56} + 2n \tag{11}$$

Bei der Kernfusion verschmelzen zwei leichte Kerne, zum Beispiel Deuterium und Tritium, zu einem schwereren Kern. Eine typische Reaktion ist

$$H^2 + H^3 \rightarrow He^4 + n \tag{12}$$

(i) Verwenden Sie die Bethe-Weizsäcker-Massenformel um zu zeigen, dass die Bindungsenergie pro Nukleon für U_{92}^{235} gleich 7.6 MeV ist. Die Bethe-Weizsäcker-Massenformel lautet

$$E_B = a_V A - a_0 A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{4A} + E_P, \tag{13}$$

mit $E_P = -a_P/A^{1/2}$ ($E_P = 0$; $E_P = a_P/A^{1/2}$) für Teilchen wobei N,Z ungerade/ungerade (gerade/ungerade oder ungerade/gerade; gerade/gerade) sind. Die Energiekonstanten sind aus Messdaten zu $a_V = 15.67$ MeV, $a_0 = 17.23$ MeV, $a_C = 0.714$ MeV, $a_A = 93.15$ MeV und $a_P = 11.2$ MeV bestimmt.

(ii) Berechnen Sie die in beiden Reaktionen freiwerdende Energie. Hinweis: Die Bethe-Weizsäcker-Massenformel ergibt für Kr^{92} Ba^{142} folgende Bindungsenergien:

$$\begin{aligned} E_B(Kr_{36}^{92}) \text{ / pro Nukleon} &= 8.7 \text{ MeV}, \\ E_B(Ba_{56}^{142}) \text{ / pro Nukleon} &= 8.4 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Massen der leichten Kerne und des Neutrons in atomaren Masseneinheiten sind

$$\begin{aligned} M(H^2) &= 2.014102u, \\ M(H^3) &= 3.016049u, \\ M(He^4) &= 4.002602u, \\ M(n) &= 1.008665u, \end{aligned} \tag{15}$$

mit $1u = 931.5$ MeV.

(iii) Berechnen Sie hieraus die Energie in Kilowattstunden, die bei der Spaltung von 1 g U^{235} insgesamt freigesetzt wird. Vergleichen Sie diese mit der bei der Fusion von 1 g Ausgangsstoff (Deuterium + Tritium) freiwerdenden Energie. Die Masse des Urans ist $M(U^{235}) = 235.043924u$, und $1u \approx 1.66 \cdot 10^{-24}$ g. Zum Vergleich: Der Jahresenergieverbrauch eines typischen Haushalts liegt bei etwa 18.000 kWh.

(iv) Damit zwei Protonen zu einem Deuteriumkern verschmelzen können, dürfen sie nicht weiter als etwa 10^{-14} m voneinander entfernt sein, damit die Anziehungskraft des Kernpotentials größer wird als die Coulomb-Abstoßung. Wie heiß muss ein Wasserstoffplasma sein, damit ein Proton mit der mittleren kinetischen Energie die Coulomb-Barriere überwinden kann? Wir nehmen an, dass der Zusammenhang zwischen durchschnittlicher kinetischer Energie (E_k) und Temperatur (T) im Plasma gegeben ist durch $E_k = \frac{3}{2} k_B T$, mit der Boltzmann Konstante $k_B = 8.617 \cdot 10^{-5} eV K^{-1}$.

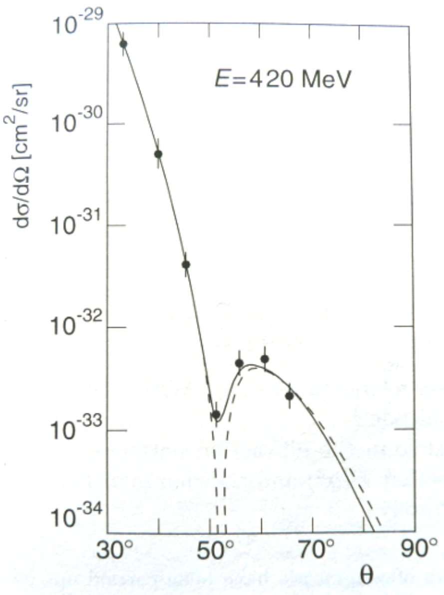

Abbildung 1: Messung des Wirkungsquerschnittes für Streuung von Elektronen mit einer Energie von 420 MeV an C^{12} Atomen für 7 Winkel θ. Die Kurve entspricht der Mott-Vorhersage multipliziert mit dem Formfaktor einer homogenen Kugel wobei der Radius der Kugel an die Messdaten angepasst wurde. Die durchgehende Linie entspricht der Anpassung einer verbesserten theoretischen Vorhersage an die Messdaten.

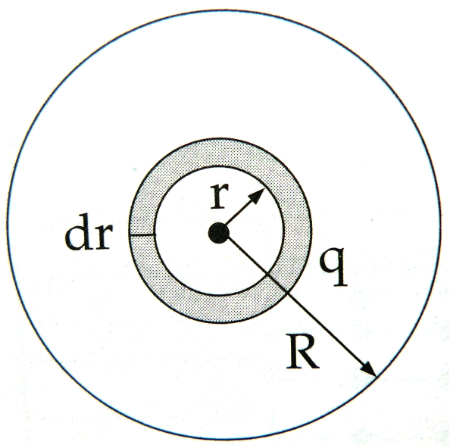

Abbildung 2: Zur Berechnung der Coulombenergie betrachten wir den Kern als eine homogene Kugel mit Radius R, bestehend aus vielen, dünnen Schichten mit Dicke dr.