Kern- und Teilchenphysik
Übung IV

Prof. Markus Schumacher, Dr. Henrik Nilsen

18. - 21.5.2010

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 19 *Zustandsdichte im Fermigas*

Betrachten Sie folgendes Modell: ein freies Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen ist in einem Rechteckpotential $V(x,y,z)$ eingeschlossen. Das Potential hat den Wert 0 innerhalb eines Würfels mit Kantenlänge a und den Wert ∞ außerhalb des Würfels.

(i) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung,

$$-\frac{1}{2m}\Delta\Psi = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) = E\Psi, \tag{1}$$

für das Teilchen. Hinweis: Betrachten Sie erst das 1-dimensionale Problem

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k^2 X(x),\ \ k = \sqrt{2mE} \tag{2}$$

und schreiben Sie die Lösung als Funktion der Kreiswellenzahl k, mit $k = p$ (natürliche Einheiten, $\hbar = 1$) wobei p der Impuls des Teilchens ist. Was sind die Randbedingugen der Lösung?

(ii) Zeigen Sie dass die Lösung des 3-dimensonale Problems als die Produkt der 3 unabhängingen Lösungen der 1-dimensionale Probleme, $X(x)$, $Y(y)$ und $Z(z)$, geschrieben werden kan.

(iii) Welche Energiezustände kann das Teilchen haben?

(iv) Was ist die Dichte (dn/dp) der möglichen Zustände? Betrachten Sie dafür eine Kugelschale im Impulsraum.

Aufgabe 20 *γ-Zerfälle*

Geben Sie die möglichen EM Übergänge für die folgenden Kernübergänge an (jeweils J^P Darstellung von Drehimpuls und Parität)

$$3/2^+ \to 1/2^+\ ;\ 2^+ \to 0^+\ ;\ 2^- \to 0^+\ ;\ 3^- \to 1/2^+\ ;\ 0^+ \to 0^- \tag{3}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 21 *Spin und Parität* **2 Punkte**

Ein gerade-gerade Kern im Grundzustand zerfällt durch α-Emission. Welche J^P-Zustände des Tochterkerns können bevölkert werden?

Aufgabe 22 *γ-Strahlung und Mößbauer Effekt* **3 Punkte**

(i) Der Kern ^7Li emittiert von einem Zustand mit $J^P = \frac{1}{2}^-$ ein 0.48 MeV γ-Quant zum $J^P = \frac{3}{2}^-$ Grundzustand. Welche Multipolaritäten könnte die γ-Strahlung haben?

(ii) Nachfolgend sind die Energie und die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustandes einiger Atomen gegeben. Berechnen Sie für jedes Isotop die natürliche Linienbreite und die Doppler-Linienbreite bei $T = 300$ K und $T = 4$ K (Temperatur des flüssigen Heliums) für den γ-Übergang vom angeregten Zustand in den Grundzustand sowie die Rückstoßergie des Atomkerns nach erfolgter γ-Emmission. ^{57}Fe: 14.4 keV, 141 ns; ^{165}Ho: 95 keV, 32 ps; ^{181}Ta: 6.2 keV, 9.8 μs. Für welche aus den drei Atomkernen kann unter umständen ein emittiertes Photon wieder absorbiert werden?

Aufgabe 23 *Mößbauer Effekt* **4 Punkte**

Die Energie und die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustandes des Mößbauer Isotops ^{57}Fe ist 14.4 keV und 141 ns. Betrachten Sie den angeregten Zustand als ein ruhendes Teilchen mit der Masse M^*. Dieses Teilchen zerfällt nun in ein Photon mit der Energie E und den nicht angeregten Kern mit der Masse M. Der Unterschied der Massen ist $E_0 = (M^* - M)c^2$.

(i) Berechnen Sie die Energie des emittierten Photons E_γ als Funktion der Massen M^* und M als relativistischen Zweikörperzerfall. Berechnen Sie dann E_γ als Funktion von E_0 und M^*.

(ii) Kann die Resonanzbedingung $\mid E_\gamma - E_0 \mid < \Gamma$ erfüllt werden? Wie groß müsste M sein, damit es doch ginge, und wie vielen Eisenatommassen entspricht diese Masse? Γ ist hier die natürliche Linienbreite.

Aufgabe 24 *β-Strahlung und Neutrinomasse* **5 Punkte**

Das Impulsspektrum eines Elektrons/Positrons aus einem β-Zerfall ist gegeben als

$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = \frac{1}{2\pi^3} F(E_e, Z)|M|2m_e p_e^2 (E_0 - E_e)^2, \tag{4}$$

wo M das Matrixelement ist, p_e (E_e) der Impuls (die Energie) des Elektrons, und E_0 die gesamte kinematische Energie der Endzustandsteilchen. Der Fermi-Faktor $F(E_e, Z)$ beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen dem Elektron/Positron und den Protonen im Kern. Angenommen, dass das Matrixelement nicht abhängig von der Kinematik des Elektrons/Positrons ist und, dass der Fermi-Faktor vernachlässigt wird, ist:

$$\frac{\Gamma}{dp_e} = C p_e^2 (E_0 - E_e)^2, \tag{5}$$

wo C eine Konstante ist.

(i) Zeigen Sie, dass der Anteil der β-Zerfälle mit $E_0 - E_e < 5$ eV ungefähr gleich

$$\frac{315}{16} E_0^{-3} \epsilon^3 \tag{6}$$

ist. Hinweis: Bestimmen Sie das Energiespektrum $\frac{d\Gamma}{dE_e}$ und verwenden Sie die Näherung

$$\int_{a-\epsilon}^{a} x^{1/2} (a - x)^2 dx \approx \frac{1}{3} a^{1/2} \epsilon^3 \tag{7}$$

(ii) Wie kann man eine Neutrinomasse von z.B. 5 GeV experimentell ausschließen, und welche β-Quellen eignen sich dafür? Tritium-Zerfälle ($^3H \rightarrow^3 He + e^- + \bar{\nu}_e$) werden oft verwendet, um die Neutrinomasse zu bestimmen, und es gilt $E_0 = 18.6$ keV. Wie groß ist der Anteil der Zerfälle mit $E_0 - E_e < 5$ eV?

Aufgabe 25 *Neutronmoderator im Kernreaktor* **6 Punkte**

Die durchschnittliche Energie eines Neutrons aus Spaltung von ^{235}U ist ungefähr 2 MeV. Der Wirkungsquerschnitt für induzierte Spaltung von ^{235}U nimmt mit steigender Energie ab. Um bei der Spaltung von ^{235}U eine Kettenreaktion zu erlauben ist es deswegen nötig die Neutronenergie durch elastische Streuungen an Kernen eines Moderator-Materials auf ungefähr 0.025 eV zu reduzieren , z.B. Kohlenstoff.

(i) Ein nicht-relativistisches Neutron mit Geschwindigkeit v im Laborsystem erfährt eine elastische Streuung an einem Kern mit Masse M. Es wird angenommen das die Streuung isotrop ist. Zeigen Sie, dass die durchschnittliche kinetische Energie der Neutronen nach der Streuung gegeben ist durch:

$$E_f = \frac{M^2 + m^2}{(M + m)^2} E_i. \tag{8}$$

(ii) Wie viele Streuungen sind ungefähr nötig um die Neutronenenergie von 2 MeV auf 0.025 eV zu reduzieren mittels ^{12}C als Moderator?