

Kern- und Teilchenphysik

Übung VIII

Prof. Markus Schumacher, Dr. Henrik Nilsen

21. - 25.6.2010

Hausaufgabe von letzter Woche

Aufgabe 46 *Magnetische Moment der Proton im Quark-Modell*

6 Punkte

Die Spin- und Flavourwellenfunktion des Proton lautet

$$\begin{aligned}
 |p\rangle = & \frac{1}{\sqrt{18}} (2 |u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + 2 |u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle + 2 |d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle \\
 & - |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle - |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle - |u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle \\
 & - |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Das magnetische Moment eines punktförmigen Teilchens mit Ladung q und Masse m ist gegeben als

$$\vec{\mu} = \frac{q}{mc} \vec{S},$$

mit einer Projektion an die z -Achse gleich

$$\mu = \frac{q}{mc} S_z.$$

Für Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen ist $S_z = \hbar/2$. Die z -Projektion des gesamten magnetischen Momentes eines Baryons, μ_B , ist gegeben als

$$\mu_B = \langle q_1 q_2 q_3 | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) | q_1 q_2 q_3 \rangle,$$

wobei μ_i die z -Projektionen von $\vec{\mu}_i$ für Quark Nummer i von Links in $|q_1 q_2 q_3\rangle$ ist. Berechnen Sie μ für das Proton in Einheiten des Kernmagneton ($e\hbar/2m_p c$) mittels Gl. 1 und vergleichen Sie mit dem gemessenen Wert $\mu_p = 2.793$. Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Massen der u und d Quarks $m_u = m_d = 336 \text{ MeV}/c^2$ sind. Die Basis $|u\rangle, |d\rangle$ ist orthogonal und normiert, so dass z.B. $\langle u \uparrow | u \uparrow \rangle = 1$ und $\langle u \uparrow | u \downarrow \rangle = \langle u \uparrow | d \uparrow \rangle = \langle u \uparrow | d \downarrow \rangle = 0$.

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 47 *Addition von Spin und Drehimpuls*

- (i) Das Elektron in einem Wasserstoffatom befindet sich im Bahndrehimpulszustand $|2, -1\rangle$ und Spinzustand $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Welche Messwerte der Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der jeweilige Meßwert angenommen? Hinweis: Clebsch-Gordon Koeffizienten sind in Abb. 1 angegeben.
- (ii) 2 Teilchen mit Spin $\frac{3}{2}$ und 2 sind gegeben. Es wird angenommen, die Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses des 2-Teilchensystems betrage $\frac{5}{2}$, die z -Komponente $j_z = -\frac{1}{2}$. Welche mögliche Meßwerte ergeben sich für die z -Komponente des Spins s_z des Spin-2 Teilchen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden sie angenommen? Hinweis: Clebsch-Gordon Koeffizienten sind gegeben im Tabelle 1.

Aufgabe 48 *G-Parität, Teil 1*

Die C -Parität ist nur definiert für neutrale Teilchen und ist deswegen von eingeschränktem Nutzwert wenn man Auswahlregeln für Interaktionen zwischen Teilchen herleiten möchte. Eine nützliche Erweiterung der C -Parität ist die G -Parität, eine Kombination aus C und einer Rotation im Isospinraum um 180 Grad um die I_2 Achse:

$$G = C \times R_2. \quad (2)$$

Für einen Isospin-Triplett, wie π oder ρ , ist

$$R_2 = \exp(i\pi I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

während $R_2 = 1$ für einen Isospin-Singlett ist. Für Isospin-Triplets sind die positivgeladenen Teilchen definiert als $(1,0,0)$, die neutralen als $(0,1,0)$ und die negativen als $(0,0,1)$. Für ein 2-Teilchensystem bestehend aus ein Fermion und dessen Antiferminon gilt $C | f\bar{f} \rangle = (-1)^{l+s} | f\bar{f} \rangle$ wo l (s) der Bahndrehimpuls (Spin) des 2-Teilchensystems ist.

- (i) Was ist der G Parität die Teilchen in den π und ρ Isospin-Triplets? Und für das Isospin-Singlett ω ? (Hinweis für Triplets: Fangen Sie mit dem neutralen Teilchen an. Für die geladene Mesonen (m^\pm) im Triplett ist die C -Parität nur bis auf ein Vorzeichen definiert, so dass $C \times m^\pm = \pm m^\mp$. Für jedes geladenes Meson wählen wir das Vorzeichen so dass alle Mesonen im Triplett die gleiche G -Parität hat.)

Hausaufgaben

Aufgabe 49 *Elektronspin im klassischen Modell***2 Punkte**

Nehmen Sie an, dass ein Elektron eine klassische Kugel ist, mit homogener Ladungs- und Massendichte. Was müsste die Geschwindigkeit eines Punkts am Äquator der Kugel sein, damit der gemessene Spin des Elektrons ($\hbar/2$) gleich den Drehimpuls der Kugel ist? Was schließen Sie daraus im Hinblick auf die Gültigkeit des Kugelmodells? Hinweis: Der Radius eines Elektrons ist experimentell eingeschränkt durch $r < 10^{-18}$ m, was eine untere Grenze für die Geschwindigkeit liefert.

Aufgabe 50 *G-Parität, Teil 2***4 Punkte**

Fortsetzung zur zweiten Anwesenheitsaufgabe.

- (i) Was ist die G -Parität eines Systems bestehend aus n Pionen?
 (ii) Erklären Sie warum die G -Parität in der starken Wechselwirkung erhalten ist.
 (iii) Wie kann man erklären, dass ρ in 2 Pionen zerfällt, während ω in 3 Pionen zerfällt?

Aufgabe 51 *η -Zerfall***4 Punkte**

Die häufigsten Zerfälle des η Mesons sind

$$\eta \rightarrow 2\gamma(39\%), \quad \eta \rightarrow 3\pi(55\%), \quad \eta \rightarrow \pi\pi\gamma(5\%) \quad (4)$$

- (i) Erklären Sie, warum der Zerfall $\eta \rightarrow 2\pi$ verboten ist für sowohl die starke als auch die elektromagnetische Wechselwirkung.
 (ii) Erklären Sie, warum der Zerfall $\eta \rightarrow 3\pi$ verboten ist für die starke Wechselwirkung.
 (iii) Wie lang würde man daher erwarten, ist die Lebensdauer des η Mesons, verglichen mit der des ρ Mesons? Hinweis: ρ s zerfallen zu $\approx 100\%$ in 3π über die starke Wechselwirkung.

Hinweise zu (i) und (ii): betrachten Sie Parität und G -Parität im Anfangs- und Endzustand.

Aufgabe 52 *Drehimpuls und Spin***2 Punkte**

Wir betrachten der Zerfall $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$. Welche Bahndrehimpulse sind im Endzustand möglich?

Aufgabe 53 *Isospin: πp -Streuung***8 Punkte**

Betrachten Sie die Pion-Nukleon Streuung:

- (a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$
 (b) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$
 (c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

- (i) Was sind die Isospin-Quantenzahlen (I, I_3) a) der einzelnen Teilchen? b) der Anfangs- und Endzustände? Hinweis für Teil b): Clebsch-Gordon Koeffizienten sind gegeben im Abb. 1.

Die Übergangsamplitude (\mathcal{M}) von Anfangszustand $|I_a, I_{a,3}\rangle$ in den Endzustand $|I_e, I_{e,3}\rangle$ ist gegeben mit der Übergangsmatrix H als $\mathcal{M} = \langle I_e, I_{e,3} | H | I_a, I_{a,3} \rangle$. Die Wirkungsquerschnitt (σ) des Prozesses ist proportional zu \mathcal{M}^2 . Wir definieren $\mathcal{M}_3 \equiv \langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | H | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ und $\mathcal{M}_1 \equiv \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | H | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

- (ii) Warum ist $\langle \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} | H | \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \rangle = \mathcal{M}_3$ und $\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | H | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = \mathcal{M}_1$? Hinweis: Für Pion-Nukleon Streuung beschreibt H eine starke Wechselwirkung.
- (iii) Was sind die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte der drei Prozesse (a), (b) und (c), $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c$, ausgedrückt durch \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_3 ?
- (iv) Für eine Schwerpunktsenergie (\sqrt{s}) von 1232 MeV formen das Pion und das Nukleon eine Δ^{++} (für (a)) oder Δ^0 Baryon (für (b) und (c)). Die Δ -Baryonen haben Isospin $I = \frac{3}{2}$, und als Konsequenz davon ist $\mathcal{M}_3 \gg \mathcal{M}_1$ für $\sqrt{s} \approx 1232$ MeV. Schätzen Sie das Verhältnis $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c$ für diese Energie ab.
- (v) Experimentell ist es einfacher den totalen Wirkungsquerschnitt für (b) und (c) ($\sigma_{tot}(\pi^- + p)$) zu messen als für jeden Prozess einzeln. Was ist das Verhältnis

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ + p)}{\sigma_{tot}(\pi^- + p)}? \quad (5)$$

Vergleichen Sie ihre Antwort mit den gemessenen Wirkungsquerschnitten im Abb. 2.

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

| | | | |
|-------|-------|--------------|---------|
| | J | J | ... |
| m_1 | m_2 | M | M ... |
| m_1 | m_2 | Coefficients | |
| . | . | | |
| . | . | | |

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$d_{\ell}^j = (-1)^m Y_{\ell}^{m*} Y_{\ell}^j e^{-im\phi}$$

$$d_{\ell,0}^{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^m e^{-im\phi}$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{-m,-m'}^j$$

$$d_{1,0}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$$

$$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$$

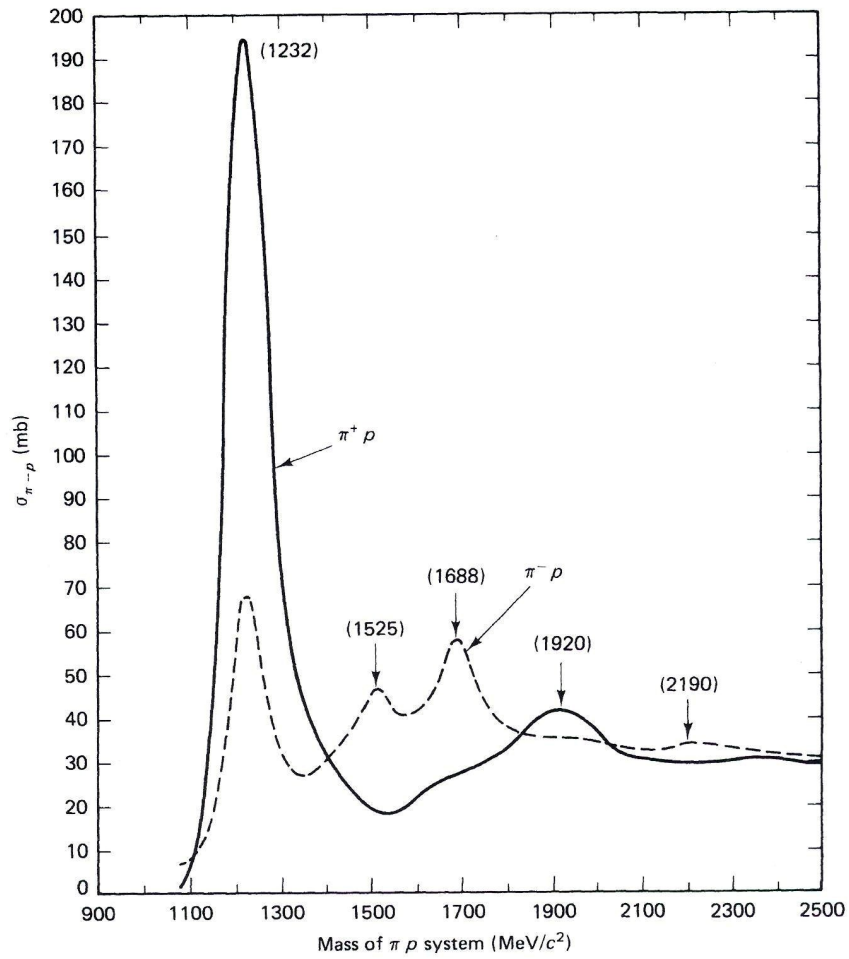
$$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$$

$$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$$

$$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$$

$$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Abbildung 1: Clebsch-Gordan-Koeffizienten



Total cross sections for $\pi^+ p$ (solid line) and $\pi^- p$ (dashed line) scattering. (Source: Gasiorowicz, S. (1966) *Elementary Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, p. 294. Reprinted by permission of John Wiley and Sons, Inc.)

Abbildung 2: Totaler Wirkungsquerschnitt für $\pi^+ p$ (durchgezogen) und $\pi^- p$ (gestrichelt) Streuung als Funktion der Schwerpunktsenergie.