Fortgeschrittene Experimentalphysik für Lehramtsstudenten

Elizabeth von Hauff, Markus Schumacher

Übungsblatt VII

Alina Chanaewa, Martin Flechl, Stan Lai

24./27.6.2013

Anwesenheitsaufgaben

Übung 6 *Wiederholung: Streuung, Atome, Quarks*

(i) Was ist der Unterschied zwischen elastischer und inelastischer Streuung? Welche kinematischen Größen können bei elastischer Streuung gemessen werden und geben Rückschlüsse auf die Struktur des Targets?

(ii) Rutherford-Streuung: Beschreibe Versuchsaufbau und -idee, sowie das Ergebnis (qualitativ; Unterschied zwischen Beobachtung und Vorhersage des Thomson-Modells). Was sind die Grenzen dieses Modells, und was beschreibt die Mott-Streuung?

(iii) Warum ist für ein Elektron, wenn es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würde, keine Rückwärtsstreuung an einem Target mit Spin 0 möglich (Hinweis: siehe Mott-Streuung)?

(iv) Was ist anomale Rutherfordstreuung? Wie kann damit eine obere Grenze für den Kernradius bestimmt werden?

(v) Erkläre den Begriff des Formfaktors in elastischer Elektron-Proton-Streuung sowie seine Relevanz. Wie kann ein Streufaktor (qualitativ) bestimmt werden, und daraus die Ladungsverteilung?

(vi) Welche Prozesse dominieren bei Streuung von Elektronen an Protonen bei hohen Energien (bzw. hohem Energieübertrag)? Stellen Sie einen möglichen Prozess in einem Diagramm dar, und schreiben Sie die Vierervektoren der beteiligten Teilchen allgemein an (Proton in Ruhe; Energie-/Impulserhaltung).

Hausaufgaben

Übung 7 *Streuung im Coulombfeld: Ablenkwinkel als Funktion des Stoßparameters*

Betrachten Sie zunächst den Fall der Streuung eines einzelnen (leichten, Masse m) Projektils an einem einzelnen (schweren) Streuzentrum. Verwende folgendes Koordinatensystem: Stoßzentrum fest in $\vec{r} = (0, 0, 0)$, Anfangsimpuls des Projektils $\vec{p} = (p_0, 0, 0)$ ($p_0 > 0$), Stoßparameter $b > 0$ in y-Richtung. Das Projektil bleibt in der $x - y$-Ebene und fliegt entlang einer gekrümmten Trajektorie $\vec{r}(t)$, bewirkt durch die Coulomb-Kraft $F(r(t))$.

Rechnen Sie in Polarkoordinaten und bestimmen Sie den Ablenkwinkel θ (Winkel zwischen positiver x-Achse und Bewegungsrichtung im Endzustand, also für $t = \infty$) als Funktion des Stoßparameters und daraus die Rutherford-Formel. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Veranschaulichen Sie das Problem graphisch und bestimmen sie den Impuls des Projektils im Endzustand als Funktion von p_0 und θ.

(ii) Zeigen Sie, dass für die y-Komponente des Impulses gilt

$$dp_y = F_y dt = F \sin\varphi(t) dt = zZ\frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{r^2(t)}\sin\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Dabei ist F die Coulomb-Kraft, die auf das Projektil wirkt, z und Z die Ladungen von Projektil und Streuzentrum (in Einheiten der Elementarladung e).

(iii) Die r^{-2}-Abhängigkeit läßt sich mit Hilfe des Drehimpulses L eliminieren. Es genügt, diesen für den Anfangszustand zu bestimmen (wieso?). Zeigen Sie, dass die obige Gleichung dann folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$dp_y = zZ\frac{e^2}{4\pi}\frac{m}{L}\sin\varphi d\varphi. \tag{2}$$

(iv) Integrieren Sie nun diese Gleichung von Anfangszustand zu Endzustand und zeigen Sie, dass gilt

$$b = \frac{\rho_0}{2}\cot\frac{\theta}{2}, \qquad \rho_0 = \frac{zZe^2}{4\pi E_{\text{kin}}}. \tag{3}$$

Nutzen Sie die Beziehungen $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ und $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

Übung 8 *Rutherford-Formel*

Betrachten Sie nun das Rutherford-Experiment. Hier trifft eine bestimmte Zahl N_{Proj} an Projektilteilchen auf eine bestimmte Anzahl von Streuzentren N_{Targ} in einem Target, und wir nehmen an, dass jedes Teilchen maximal von einem Streuzentrum abgelenkt wird. Die gesamte bestrahlte Fläche des Targets sei A, und die gesamte Trefferfläche (Summe der Trefferflächen aller Streuzentren) sei $\Delta\sigma$.

(i) Stellen Sie sich nun einen ringförmigen Detektor mit Innenradius θ und Außenradius $\theta + d\theta$ vor. Welchen Raumwinkel deckt der Detektor als Funktion von θ ab?

(ii) Die zugehörige Trefferfläche für die ankommenden Teilchen entspricht dann auch einem Kreisring. Der Innenradius beträgt $b(\theta)$, der Außenradius $b(\theta{+}d\theta)$. Wie lautet die Fläche $d\sigma$ dieses Kreisrings (als Funktion von b und db)?

(iii) Dividieren Sie die letzten beiden Gleichungen, und zeigen Sie durch Einsetzen von $b(\theta)$ aus der vorherigen Aufgabe, dass für Coulombstreuung gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\rho_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{4}$$

Übung 9 *Größtmögliche Annäherung und anomale Rutherford-Streuung*

Bei der Streuung eines (positiv geladenen) Projektils an einem (positive geladenen) Streuzentrum nähert sich das Projektil diesem nur bis zu einem Minimalabstand $\rho(\theta)$, θ ist der Streuwinkel. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\rho(\theta) = \rho_0 \left(0.5 + \frac{1}{2\sin(\theta/2)} \right) \tag{5}$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Es sei v die Anfangsgeschwindigkeit, und v' die Geschwindigkeit bei Durchlaufen des Minimalabstandes ρ. Geben Sie zunächst die klassische kinetische Energie, potentielle Energie und den Drehimpuls des Teilchens in Bezug auf das Streuzentrum jeweils für den Anfangszustand (E_{kin}, E_{pot}, L) und den Zustand bei nächster Annäherung (E'_{kin}, E'_{pot}, L') an. Beachten Sie, dass v' senkrecht auf die zu diesem Zeitpunkt aktuelle Verbindungslinie zwischen Projektil und Streuzentrum steht.

(ii) Wie lautet der kleinstmögliche Wert für die Annäherung, der auf Grund von Energiehaltung noch erlaubt ist, ρ_0, als Funktion der kinetischen Energie des Projektils im Anfangszustand? Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$E'_{\text{pot}} = \frac{\rho_0}{\rho} E_{\text{kin}} \tag{6}$$

(iii) Zeigen Sie, dass aus Energie- und Drehimpulserhaltung folgt (b ist der Stoßparameter)

$$\frac{b^2}{\rho^2} + \frac{\rho_0}{\rho} = 1 \tag{7}$$

(iv) Zeigen Sie, dass das Endergebnis aus der (positiven) Lösung dieser Gleichung und Einsetzen von $b(\theta)$ aus einer der vorherigen Aufgaben folgt. Nutzen Sie dabei $1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$.