Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung I

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

31.10.2008

Bitte für alle Rechnungen mit Zahlenwerten $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ und $\hbar c = 0{,}2\,\mathrm{GeV\,fm}$ benutzen.

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 *Natürliche Einheiten I*

Bestimmen Sie den Wert der NEWTONschen Gravitationskonstanten $G_N = (6{,}67428 \pm 0{,}00067) \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ in den natürlichen Einheiten der Teilchenphysik.
Berechnen Sie die PLANCK-Masse $M_P = \sqrt{1/G_N}$ in natürlichen Einheiten.
Berechnen Sie außerdem die PLANCK-Masse, -Zeit und -Länge in SI-Einheiten.

Aufgabe 2 MANDELSTAM-*Variablen*

Betrachten Sie den $2 \to 2$-Streuprozess $1 + 2 \to 3 + 4$. Zeigen Sie:

(i) Für die MANDELSTAM-Variablen s, t und u gilt: $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$, wobei $m_{1\ldots4}$ die Massen der Teilchen 1 bis 4 sind.

(ii) Für den Fall identischer Massen ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \equiv m$) gilt im Schwerpunktsystem:

$$s = 4\left(p^2 + m^2\right), \qquad t = -2p^2\left(1 - \cos\theta\right), \qquad u = -2p^2\left(1 + \cos\theta\right),$$

wobei $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ der Impulsbetrag der ein- und auslaufenden Teilchen und $\theta = \angle(\vec{p}_1,\vec{p}_3)$ der Streuwinkel ist.

(iii) Für welche Streuwinkel haben t und u Minima bzw. Maxima ?

Aufgabe 3 *Phasenraumelement*

Gegeben ist eine würfelförmige unendlich hohe Potentialbarriere mit Kantenlänge L.

(i) Zeigen Sie, dass im Phasenraumvolumen d^3p um $\vec{p}$ genau $\frac{V d^3p}{(2\pi)^3 2E}$ Zustände für ein Teilchen existieren.

(ii) Zeigen Sie, dass das Phasenraumvolumen $\frac{d^3p}{E}$ LORENTZ-invariant ist. Betrachten Sie dazu das Transformationsverhalten von dp_x und E für eine LORENTZ-Transformation in x-Richtung.

(iii) Betrachten Sie einen Zwei-Teilchen-Endzustand in seinem Schwerpunktsystem. Beweisen Sie folgende Beziehung für das Phasenraumelement dLips:

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4\delta^4(p_C + p_D - p_i)\frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C}\frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \overset{\text{z.zg.}}{=} \frac{1}{4\pi^2}\frac{|\vec{p}_f|}{4\sqrt{s}}d\Omega \quad .$$

Nutzen Sie dazu folgende Hinweise:

a) $\delta^4(p - p_0) = \delta(E - E_0) \times \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_0)$ für Viererimpulse,

b) schreibe nach der Integration über einen räumlichen Impulsvektor den anderen in Kugelkoordinaten

c) und vereinfache durch Einführung der Energie im Schwerpunktsystem.

Aufgabe 4 *„Spielzeug"-Modell: Zerfall*

Betrachten Sie die Zerfallsreaktion $A \to B + C$ im Spielzeugmodell aus der Vorlesung. Das Modell beinhaltet drei spinlose Teilchen A, B und C und einen Vertex zwischen A, B und C mit der Kopplungsstärke g.
Berechnen Sie

(i) das Matrixelement $\mathfrak{M}$,

(ii) die differentielle Breite $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}\Omega$ und

(iii) die totale Zerfallsbreite Γ

für den obigen Zerfall in Abhängigkeit der Kopplungsstärke und des Betrages $|\vec{p}_f|$ des Impulses jedes der beiden Zerfallsprodukte im Ruhesystem von A. Verwenden Sie für (i) die Feynman-Regeln und für (ii) bzw. (iii) Fermis Goldene Regel für Zerfälle aus der Vorlesung.

Hausaufgaben

Aufgabe 5 *Natürliche Einheiten II* **2 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Größen in eV:

(i) die potentielle Energie einer Tafel Schokolade (M=100 g), die sich einen Meter über dem Boden befindet (man benutze $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$), und

(ii) den atmosphärischen Druck (1 bar).

Aufgabe 6 *Flussfaktor* **5 Punkte**

Bei einem Experiment mit kollinearen Geschwindigkeiten beider Teilchensorten $\alpha\vec{v}_A = \vec{v}_B$, α reell, hängt der Eingangsfluss für Streuprozesse über $F = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|\, 2E_A 2E_B$ mit Energie und Geschwindigkeit von Strahl A und B zusammen. Man zeige, dass F LORENTZ-invariant ist. Dafür reicht es, zu zeigen, dass

$$F = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|\, 2E_A 2E_B \overset{\text{z.zg.}}{=} 4\left((p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. Tipp: Bringen Sie beide Seiten der Gleichung auf die Form $F = 4\left(|\vec{p}_A|\, E_B + |\vec{p}_B|\, E_A\right)$.

Aufgabe 7 *„Spielzeug"-Modell: Streuung* **7 Punkte**

Betrachtet wird wieder das Spielzeugmodell aus der Vorlesung.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der FEYNMAN-Regeln das Matrixelement $\mathfrak{M}_{\text{ges}}$ für den Streuprozess $A + B \to A + B$ in Abhängigkeit von MANDELSTAM-Variablen, Teilchenmassen und Kopplungsstärke. Tipp: Es gibt dazu zwei Diagramme !

(ii) Berechnen Sie den zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im Schwerpunktsystem unter der Annahme gleich schwerer Teilchen A und B und eines masselosen Teilchens C im relativistischen Limes, d.h. $s, |u| \gg m_A^2,\, m_B^2$. Verwenden Sie dazu FERMIS Goldene Regel für Streuung aus der Vorlesung.
Drücken Sie Ihr Ergebnis als Funktion des Streuwinkels $\theta = \angle(\vec{p}_1,\vec{p}_3)$ und der Energie E von Teilchen A aus.

(iii) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im Ruhesystem von B. Nehmen Sie hierbei an, dass die Masse von B viel größer als die von Teilchen A ist und sein Rückstoss vernachlässigbar ist ($m_B \gg m_A, E$).

(iv) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} zu Teil (iii).

Aufgabe 8 *Zweikörperzerfall in Ruhe* **6 Punkte**

Betrachten Sie den Zerfall eines ruhenden Teilchens A in zwei Teilchen B und C.

(i) Zeigen Sie, dass für die Energien der auslaufenden Teilchen in Abhängigkeit der verschiedenen Massen gilt:

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} \qquad E_C = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_C^2}{2m_A}$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Impuls der Endzustandsteilchen $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$|\vec{p}_f| \overset{\text{z.zg.}}{=} \frac{1}{2m_A}\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad .$$