Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung IX

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

9.1.2009

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 43 LAGRANGE-*Dichte und* MAXWELL-*Gleichungen*

Zeigen Sie, dass die LAGRANGE-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

zur kovarianten Darstellung der MAXWELL-Gleichungen führen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Aufgabe 44 *Massen in der QED*

Zeigen Sie, dass ein möglicher Term

$$\frac{1}{2}M^2 A^\mu A_\mu$$

für die LAGRANGE-Dichte der QED nicht invariant unter der $U(1)$-Eichtransformation

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$$

ist.

Somit ist dieser Ansatz, dem Feld des Photons in der QED Masse zu verleihen, nicht erlaubt.

Aufgabe 45 *Dimensionsanalyse der* LAGRANGE-*Dichte*

In der Vorlesung wurde die Wirkung

$$S = \int d^4x\mathcal{L}$$

über die LAGRANGE-Dichte $\mathcal{L}$ definiert.

(i) Welches ist die natürliche Einheit der Wirkung?

(ii) Welche Dimension (und somit welche Einheit) hat die LAGRANGE-Dichte?

(iii) Betrachten Sie den Massenterm $\bar{\psi}m\psi$ eines Fermionenfeldes in der LAGRANGE-Dichte. Welche Dimension (und somit welche Einheit) hat ψ?

(iv) Betrachten Sie den Wechselwirkungsterm $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ eines Fermionenfeldes in der LAGRANGE-Dichte. Welche Dimension (und somit welche Einheit) hat A_μ?

(v) Betrachten Sie den Term $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ in der LAGRANGE-Dichte. Welche Dimension (und somit welche Einheit) hat ϕ?

Hausaufgaben

Aufgabe 46 *Invarianz der* LAGRANGE-*Dichte* **7 Punkte**

Die LAGRANGE-Dichte der elektroschwachen Wechselwirkung für die erste Leptonenfamilie ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \bar{\chi}_L i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu\right]\chi_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu\left[\partial_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu\right]e_R - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Dabei ist

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu$$

sowie $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. $\chi_L = \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$ ist das zwei-komponentige linkshändige Fermionenduplett und e_R das rechtshändige Fermionensingulett.

Das Verhalten der Komponenten unter einer infinetisimalen $SU(2)_L\times U(1)_Y$-Transformationen ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\chi_L &\to (1 + i\frac{\vec{\alpha}(x)}{2}\vec{\tau} + i\frac{\beta(x)}{2}Y)\chi_L,\\
e_R &\to (1 + i\frac{\beta(x)}{2}Y)e_R,\\
\vec{W}_\mu &\to \vec{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\alpha}(x) - \vec{\alpha}(x)\times\vec{W}_\mu,\\
B_\mu &\to B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\beta(x).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die LAGRANGE-Dichte invariant ist unter $SU(2)_L\times U(1)_Y$-Transformationen.
Hinweise: Vernachlässigen Sie dabei auftretende höhere Ordnungen der Funktionen $\vec{\alpha}(x)$ und $\beta(x)$ und beachten Sie die Identität $[\tau_i,\tau_j] = 2i\sum_k \epsilon_{ijk}\tau_k$. Überlegen Sie sich vorab, insbesondere beim erstem Term der Lagrangedichte, welche der auftretenden Terme warum wegfallen.

Aufgabe 47 *Wechselwirkung der Quarks mittels des neutralen Stroms* **7 Punkte**

Die LAGRANGE-Dichte des neutralen Stroms für die erste Quarkfamilie lautet:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NC}} = -\bar{\chi}_L\gamma_\mu\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu\chi_L - \bar{\chi}_L\gamma_\mu\frac{g'}{2}YB^\mu\chi_L - \bar{u}_R\gamma_\mu\frac{g'}{2}YB^\mu u_R - \bar{d}_R\gamma_\mu\frac{g'}{2}YB^\mu d_R.$$

Im Unterschied zur Leptonenfamilie gibt es auch ein rechtshändiges up-Quark, das an der Wechselwirkung teilnimmt. $\chi_L = \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L$ bezeichnet das linkshändige Quarkduplett des Isospins, u_R und d_R die rechtshändigen Quarksinguletts des Isospins.

(i) Bestimmen Sie explizit die schwache Hyperladung des Quarkdupletts Y_L und der Quarksinguletts Y_R^u und Y_R^d. Betrachten Sie dazu die Wechselwirkung der Quarkfelder mittels Photonenaustausch. Benutzen Sie folgende Relationen aus der Vorlesung:

$$\tan\theta_w = \frac{g'}{g} \qquad \text{sowie} \qquad g\sin\theta_w = e = g'\cos\theta_w.$$

Verifizieren Sie, dass auch für Quarks die GELL-MANN-NISHIJIMA-Relation gilt.

(ii) Betrachten Sie nun die Wechselwirkung der Quarks mittels des Z^0-Austauschs. Bestimmen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung die links- und rechtshändigen Kopplungen c_L, c_R.
Berechnen Sie daraus schließlich die Vektor- und Axialvektorkopplungen c_V und c_A der Quarks.

Aufgabe 48 *Totaler Wirkungsquerschnitt für $e^+e^-\to f\bar{f}$* **6 Punkte**

Aus der Vorlesung ist die Gleichung

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(s) = \frac{N_C\pi}{s}\frac{4}{3}\left[\alpha^2 Q_f^2 - 8\alpha Q_f\Re(\chi)c_{v_e}c_{v_f} + 16\,|\chi|^2\left(c_{v_e}^2 + c_{a_e}^2\right)\left(c_{v_f}^2 + c_{a_f}^2\right)\right]$$

für den totalen Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \to f\bar{f}$-Prozesse bekannt. Dabei gelten die Relationen:

$$
\begin{aligned}
c_{v_i} &= I_{3,i} - 2Q_i \sin^2\theta_w, \\
c_{a_i} &= I_{3,i} \\
\chi(s) &= \frac{G_F m_{Z^0}^2}{8\pi\sqrt{2}} \frac{s}{s - m_{Z^0}^2 + i\frac{s\Gamma_{Z^0}}{m_{Z^0}}}.
\end{aligned}
$$

Benutzen Sie die Werte für die Z^0-Masse und die totale Zerfallsbreite des Z^0-Bosons Γ_{Z^0}, Fermis Kopplungskonstante G_F und den schwachen Mischungswinkel θ_w, um numerisch den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} für $e^+e^- \to q\bar{q}$-Prozesse ($q = u, d, s, c, b$) sowie die Verhältnisse $\frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{tot}}}$ der drei Beiträge zu σ_{tot} durch γ-Austausch, Z^0-γ-Interferenz und Z^0-Austausch für folgende Schwerpunktsenergien zu bestimmen:

$$\sqrt{s} = 10\,\text{GeV},\ 30\,\text{GeV},\ 60\,\text{GeV},\ m_{Z^0} \text{ und } 200\,\text{GeV}.$$

$$
\begin{aligned}
m_{Z^0} &= 91{,}1876\,\text{GeV} \\
\Gamma_{Z^0} &= 2{,}4952\,\text{GeV} \\
G_F &= 1{,}166 \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2} \\
\sin^2\theta_w &= 0{,}234
\end{aligned}
$$