

# Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

## Übung X

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

16.1.2009

### Anwesenheitsaufgaben

#### Aufgabe 49 $Z^0$ -Breite und die Anzahl leichter Neutrinosorten

(i) Die totale Zerfallsbreite des  $Z^0$ -Bosons ist:

$$\Gamma_{Z^0} = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_\tau + \Gamma_{\text{had}} + \Gamma_{\text{inv}}.$$

Dabei sind  $\Gamma_l$  die Partialbreiten aus Zerfällen in Leptonenpaare  $l\bar{l}$ ,  $\Gamma_{\text{had}}$  die Partialbreite aus hadronischen Zerfällen und  $\Gamma_{\text{inv}}$  die Partialbreite aus Zerfällen in unsichtbare Teilchen.

Zeigen sie, dass das Verhältnis von unsichtbarer und leptonischer Zerfallsbreite pro Familie gegeben ist durch

$$R_{\text{inv}} = \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} = \left[ \frac{12\pi R_l}{\sigma_{\text{peak}}^{\text{had}} M_{Z^0}^2} \right]^{\frac{1}{2}} - R_l - 3.$$

Dabei ist  $R_l = \frac{\Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_l}$  und  $\sigma_{\text{peak}}^{\text{had}}$  ist der Wirkungsquerschnitt für  $Z^0 \rightarrow \text{Hadronen}$  für  $\sqrt{s} = m_{Z^0}$ .

(ii) Benutzen Sie die theoretische Vorhersage des Standardmodells

$$R_{\text{inv}} = N_\nu \left( \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_l} \right)_{\text{SM}}$$

sowie das Ergebnis

$$\left( \frac{\Gamma_{\nu_l}}{\Gamma_l} \right)_{\text{SM}} = 1,99125,$$

um zu zeigen, dass das Standardmodell  $N_\nu = 3$  leichte Neutrinos enthält.

*Hinweise:*

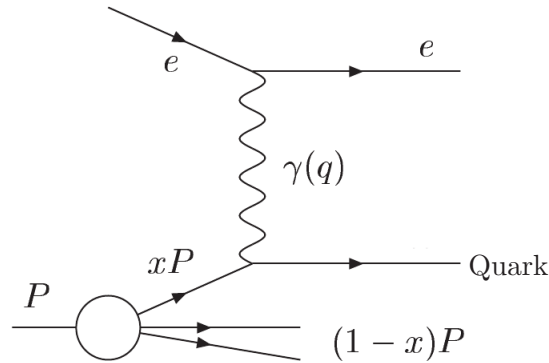
$$m_{Z^0} = 91,1876 \text{ GeV}$$

$$R_l = 20,767$$

$$\sigma_{\text{peak}}^{\text{had}} = 41,540 \text{ nb}$$

**Aufgabe 50** *Kinematik tiefinelastischer Elektron-Proton-Streuung*

Tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung kann als elastische Streuung mit einem Parton betrachtet werden.



Dabei trägt das Parton den Anteil  $x$  des Protonenimpulses  $P$ . Die Impulse des ein- und auslaufenden Elektrons sind  $k$  und  $k'$ , der Impulsübertrag  $q = k - k'$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $x$  gerade gleich

$$x_{\text{BJORKEN}} = \frac{-q^2}{2P \cdot q}$$

ist, wenn der Transversalimpuls des Partons, die Partonenmasse sowie die Masse des Elektrons und die des Protons vernachlässigbar sind.

- (ii) Zeigen Sie, dass die LORENTZ-Invariante  $\nu = \frac{P \cdot q}{M}$  gleich dem Energieübertrag  $\tilde{\nu} = E - E'$  des Elektrons im Ruhssystem des Protons ist.
- (iii) Abbildung 1 zeigt ein typisches Ereignis tiefinelastischer Streuung, wie es mit dem ZEUS-Detektor am DESY aufgenommen wurde. Dabei kommt das Positron von links mit einer Energie von 27,5 GeV, das Proton von rechts mit einer Energie von 820 GeV. Der Polarwinkel wird bei ZEUS von der Richtung des Protonenstrahls aus gemessen. Beim beschriebenen Ereignis wird das Elektron nach  $\theta_e = 39,3^\circ$  gestreut und deponiert  $E'_e = 166$  GeV im elektromagnetischen Kalorimeter. Die folgenden LORENTZ-Invarianten stehen für die kinematische Beschreibung des Ereignisses zur Verfügung:

$$x = \frac{-q^2}{2P \cdot q} \quad y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \quad s = (k + P)^2 \quad Q^2 = -q^2$$

Leiten Sie eine Beziehung zwischen  $Q^2$ ,  $x$ ,  $y$  und  $s$  her. Dabei ist  $s$  für den Kollisionsprozess fest, so dass zwei Freiheitsgrade bleiben. Vernachlässigen Sie wiederum alle Teilchenmassen.

Berechnen Sie  $x$  und  $Q^2$  für das beschriebene Ereignis.

*Hinweis:* Berechnen Sie  $x$  aus  $y$  und  $Q^2$ .

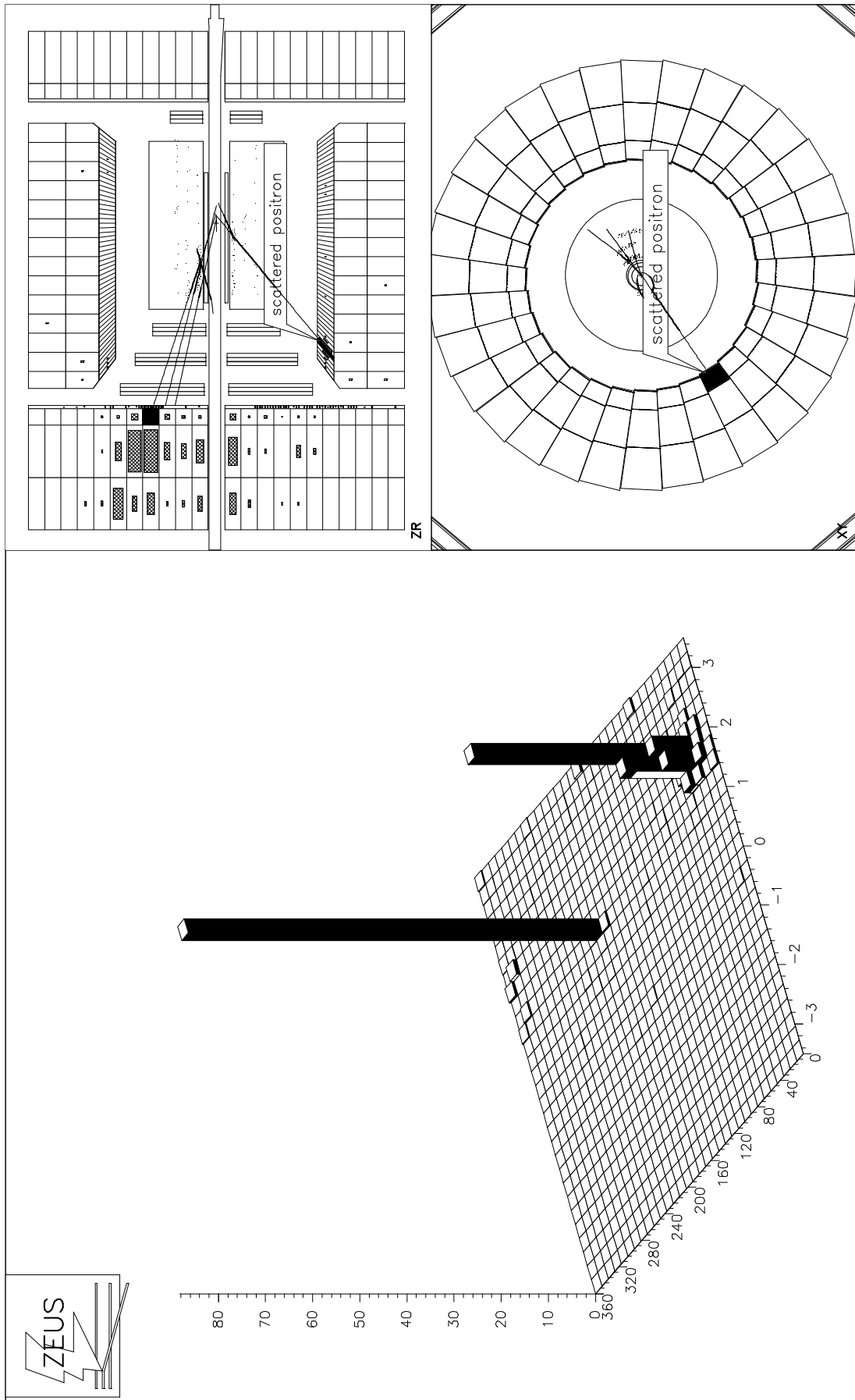


Abbildung 1: Bei ZEUS aufgezeichnetes Ereignis tiefinelastischer Streuung in der  $r$ - $z$ -Projektion (o.l.) und  $r$ - $\phi$ -Projektion (o.r.) sowie in der  $\eta$ - $\phi$ -Ebene. Der Polarwinkel wird bei ZEUS von der Richtung des Protonenstrahls aus gemessen („von oben“ in der Abbildung o.l.) und definiert die in guter Näherung LORENTZ-invariante Pseudorapidität  $\eta = -\ln \tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$ .

# Hausaufgaben

## Aufgabe 51 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

4 Punkte

In der Vorlesung wurde die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bei der Produktion von Fermionenpaaren  $f\bar{f}$  angegeben:

$$A_{\text{vorw.-rückw.}}^f = \frac{\sigma_{\text{vorw.}} - \sigma_{\text{rückw.}}}{\sigma_{\text{tot.}}}$$

Dabei ist

$$\sigma_{\text{vorw.}} - \sigma_{\text{rückw.}} = \frac{N_C \pi}{2s} \left[ -8\alpha Q_f \Re(\chi) \cdot c_{a_e} c_{a_f} + 16 |\chi|^2 \cdot 8c_{v_e} c_{v_f} c_{a_e} c_{a_f} \right]$$

Bestimmen Sie für den Prozess  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  numerisch die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie  $A_{\text{vorw.-rückw.}}^\mu$  für folgende Werte der Schwerpunktsenergie:

$$\sqrt{s} = 30 \text{ GeV}, m_{Z^0} - 1 \text{ GeV}, m_{Z^0}, m_{Z^0} + 1 \text{ GeV} \text{ und } 200 \text{ GeV}.$$

## Aufgabe 52 Polarisationsbestimmung von $\tau$ -Leptonen

6 Punkte

Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für die Produktion von  $\tau$ -Leptonen bei LEP wurde u.a. über die Messung der Polarisation der  $\tau$ -Leptonen über den Zerfall  $\tau \rightarrow \pi\nu_\tau$  bestimmt.

- (i) Betrachten Sie den Zerfall  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$  im Ruhesystem des  $\tau^-$ -Leptons. Zeigen Sie grafisch, wie sich die bevorzugte Bewegungsrichtung der Pionen zur Spinrichtung der  $\tau^-$ -Leptonen verhält.
- (ii) Die differentielle Zerfallsbreite für  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$  ist im Ruhesystem des  $\tau^-$ -Leptons gegeben durch:

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d \cos \theta_\pi} = \frac{1}{2} (1 + P_\tau \cos \theta_\pi).$$

Dabei ist  $\theta_\pi$  der Winkel zwischen dem Impuls des Pions und dem Spin des  $\tau^-$ -Leptons sowie  $P_\tau$  die Polarisation des  $\tau^-$ -Leptons. Zeigen Sie durch eine Koordinatentransformation, dass die differentielle Zerfallsbreite im Laborsystem durch

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\kappa_\pi} = 1 + P_\tau (2\kappa_\pi - 1).$$

gegeben ist. Dabei ist  $\kappa_\pi = \frac{E_\pi}{E_\tau}$  die mit der Energie des  $\tau^-$ -Leptons skalierte Energie des Pions. Beachten Sie, dass die Gesamtenergie des  $\tau^-$ -Leptons sehr viel größer als dessen Ruhemasse ist und machen Sie sich die Konsequenzen für die Impulse der Zerfallsprodukte senkrecht und parallel zur  $\tau^-$ -Flugrichtung klar.

- (iii) Wie sieht die Verteilung  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\kappa_\pi}$  für  $P_\tau = \pm 1$  sowie für  $P_\tau = -14\%$  (LEP-Messwert) aus?

## Aufgabe 53 Tiefinelastische Streuung im Quark-Parton-Modell

6 Punkte

Die Ergebnisse tiefinelastischer  $ep$ -Streuung sollen auf elastische Streuprozesse mit den im Proton enthaltenen Partonen zurückgeführt werden.

- (i) Der Wirkungsquerschnitt des elastischen Streuprozesses eines Elektrons an einem punktförmigen Teilchen in Ruhe (Ladung  $q$ , Spin  $\frac{1}{2}$ ) ist gegeben durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 q^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (1)$$

Dabei sind  $E$  und  $E'$  die Energien des ein- bzw. auslaufenden Elektrons,  $\theta$  der Streuwinkel und  $Q^2 = -t$  der Impulsübertrag auf das Proton.

Erklären Sie die Bedeutung der verschiedenen Terme in Gleichung (1). Wie verändert sich der Wirkungsquerschnitt in den Fällen spinloser Targetteilchen bzw. sehr schwerer Targetteilchen?

- (ii) Die elastische Streuung von Elektronen an Protonen wird durch die ROSENBLUTH-Gleichung beschrieben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16M^2 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left( K_2(Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2K_1(Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2)$$

Die Größen  $K_1(Q^2)$  und  $K_2(Q^2)$  sind die aus der Vorlesung bekannten Formfaktoren, die über eine FOURIER-Transformation mit der Ladungsverteilung und dem magnetischen Dipolmoment zusammenhängen.

Lesen Sie aus Gleichungen (1) und (2) die Formfaktoren eines punktförmigen Teilchens ab.

- (iii) Inelastische Streuprozesse von Elektronen an Protonen werden durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( W_2(Q^2, x) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, x) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3)$$

beschrieben.

Die Strukturfunktionen  $W_1(Q^2, x)$  und  $W_2(Q^2, x)$  hängen von  $Q^2$  und der BJORKEN-Variablen  $x$  ab. Im Experiment werden üblicher Weise  $E'$  und  $\theta$  gemessen, zur theoretischen Beschreibung hingegen werden die LORENTZ-Invarianten  $Q^2$  und  $x$  (oder  $\nu$ ) bevorzugt. Nehmen Sie an, dass das Proton aus  $i$  Quarks der Massen  $m_i$  besteht, wobei die Quarks Anteile  $z_i$  am Gesamtimpuls des Protonenimpulses  $p$  tragen.

Leiten Sie einen Ausdruck für die Strukturfunktionen  $W_{1,2}^i$  her.

Der Ansatz

$$W_{1,2}(Q^2, x) = \frac{K_{1,2}(Q^2, x)}{2MQ^2} \delta(x - 1) \quad (4)$$

für die Strukturfunktionen  $W_{1,2}$  mit Gleichung (3) führt zur ROSENBLUTH-Gleichung (s. Aufgabe 54), also  $x = 1$  elastischer Streuung entspricht.

Welche Beziehungen bestehen zwischen den  $m_i$  und der Gesamtmasse  $M$  sowie zwischen  $x_i$  und  $x$ ?

- (iv) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Impulsanteile  $z_i$  seien  $f_i(z_i)$ . Leiten Sie einen Ausdruck für  $W_1$  und  $W_2$  her, indem Sie über  $z_i$  integrieren und über alle Quarks des Protons summieren.
- (v) Es wurde beobachtet, dass die dimensionslosen Strukturfunktionen

$$F_1(x) = MW_1(Q^2, x) \quad \text{und} \quad F_2(x) = \nu W_2(Q^2, x) \quad (5)$$

in erster Ordnung nur von der BJORKEN-Variablen  $x$  abhängen. Dieses Phänomen ist als BJORKEN-Skalierung bekannt. Wie lässt sie sich im Quark-Parton-Modell erklären? Welche Beziehung zwischen  $F_2$  und  $F_1$  erwarten Sie unter der Voraussetzung, dass die Partonen bzw. Quarks jeweils Spin  $\frac{1}{2}$  tragen? Diese Beziehung ist als CALLAN-GROSS-Beziehung bekannt. Wie sieht sie für spinlose Partonen im Proton aus? Experimente liefern deutliche Hinweise auf die Gültigkeit von  $\frac{x F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$ .

#### Aufgabe 54 *Elastische Streuung als Grenzfall der Inelastischen Streuung*

**4 Punkte**

Setzen Sie den Ansatz aus Gleichung (4) in Gleichung (3) ein, um die ROSENBLUTH-Gleichung (2) für die elastische Streuung von Elektronen an Protonen herzuleiten.

Betrachten Sie dazu den Fall elastischer Streuung:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \mapsto \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \delta(x - 1).$$

Schreiben Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$  um als  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dQ^2}$ . Definieren Sie  $f(Q^2) \equiv x - 1$  und ermitteln Sie daraus  $Q_0^2$ , so dass  $f(Q_0^2) \stackrel{!}{=} 0$  gilt. Führen Sie so  $\delta(x - 1)$  auf eine Delta-Funktion in der Variablen  $Q^2$  zurück und berechnen Sie schließlich  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  aus  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dQ^2}$ .