Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2008/09

Fortgeschrittene Teilchenphysik

Markus Schumacher

Übung XII

Matthew Beckingham und Markus Warsinsky

30.01.2009

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 62 *Wiederholung*

(i) Was ist der Unterschied zwischen Abelschen und nicht Abelschen Eichgruppen? Welche physikalischen Konsequenzen ergeben sich daraus?

(ii) Warum gibt es kein neuntes Farbsingulett-Gluon? Welche experimentellen Befunde befürworten dies?

Aufgabe 63 *Wiederholung Farbfaktoren*

Betrachtet wird die Wechselwirkung zwischen einem Quark und einem Antiquark durch den Austausch eines Gluons.

(i) Zeichnen und beschriften Sie das Feynman-Diagramm für diesen Prozess.

(ii) Errechnen Sie das Übergangsmatrixelement mittels der Feynman-Regeln.

(iii) Was ist der Farbfaktor?

(iv) Wie ist das Potential zwischen den Quarks gegeben?

(v) Errechnen Sie den Farbfaktor für die Farboktettkonfiguration $R\bar{B}$. Ist eine Bindung möglich?

Aufgabe 64 *Leiteroperatoren $U_\pm$, $V_\pm$*

In der Vorlesung wurde eine Beziehung zwischen den acht Eichfeldern G_i^μ und dem Leiteroperator $I_\pm$, der anhand des Farbdreiecks definiert wurde, hergestellt.

Führen Sie die analoge Herleitung der Farbinhalte der zu $U_\pm$ (blau$\rightleftarrows$grün) gehörenden Gluonen aus:

(i) Verifizieren Sie die Beziehung

$$U_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \tag{1}$$

zwischen den Gell-Mann-Matrizen λ_i und der Matrixdarstellung (im Farbraum) von $U_\pm$.

(ii) Betrachten sie in $\sum_{j=1}^{8} \lambda_j G_j$ mit Hilfe von (1) nur die Summanden, die für $U_\pm$ relevant sind. Ersetzen Sie mit (1) die λ_i in dieser Summe.

(iii) Identifizieren Sie schließlich die zu U_+ bzw. zu U_- gehörenden Faktoren (=Farbzustände) anhand der Farbladung (z.B. $G\bar{R}$). Beachten Sie dabei, dass sowohl die G_i^μ als auch die Gluonenzustände auf 1 normiert sind. Geben Sie die Eichfelder G_i^μ als Superposition der Farbzustände an.

Hausaufgaben

Aufgabe 65 *Magnetisches Moment der Baryonen* **4 Punkte**

Die Superposition

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (2\,|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle + 2\,|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + 2\,|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle - |u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle - |u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle - |u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle - |d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle - |d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle - |u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle)$$

von Quark-Spin-Zuständen erfüllt die Symmetriebedingungen des Protonenzustandes für Spin $+\frac{1}{2}$ (siehe *Berger*, S. 254 ff.).

Die entsprechende Wellenfunktion des Neutrons ergibt sich durch Anwenden eines globalen Vorzeichens und Ersetzen von u bzw. d durch d bzw. u.

Das magnetische Moment eines punktförmigen Teilchens ergibt sich nach DIRAC aus seinem Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$, seiner Masse m und seiner Ladung Qe:

$$\vec{\mu} = 2\vec{J}\frac{Qe}{2m}. \qquad (2)$$

Für die Projektion auf die Richtung des Magnetfeldes gilt daher für ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{Qe}{2m}. \qquad (3)$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Projektionen des magnetischen Momentes auf die z-Achse ($\vec{B} \upuparrows \hat{e}_z$):

$$\mu_p = \frac{e}{2m}\langle p|\sum_i Q_i\sigma_{3,i}|p\rangle \text{ für das Proton, analog für das Neutron.}$$

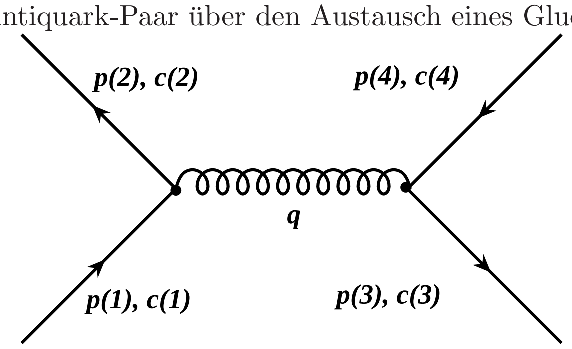
Dabei wird die Summe über die drei Quarks i gebildet. $\sigma_{3,i}$ bezeichnet die dritte PAULI-Matrix, die auf das Quark i wirkt, und es gilt z.B. für das zweite Quark:

$$\frac{e}{2m}\sigma_{3,2}\,|q_1q_2q_3\rangle = \mu_2\,|q_1q_2q_3\rangle\,.$$

Nehmen Sie gleiche Quarkmassen $m_u = m_d$ an und berechnen Sie das Verhältnis $\frac{\mu_p}{\mu_n}$. Vergleichen Sie die Vorhersage mit den experimentellen Ergebnissen $\mu_p = 2{,}79\frac{e}{2m_p}$ und $\mu_n = -1{,}91\frac{e}{2m_p}$. Berechnen Sie aus Ihrem Ergebnis und μ_p die als gleich angenommenen Quarkmassen.

Aufgabe 66 *Quark-Antiquark-Annihilation über ein Gluon* **4 Punkte**

Betrachten Sie das folgende FEYNMAN-Diagramm, welches eine Annihilation eines Quark-Antiquark-Paares in ein anderes Quark-Antiquark-Paar über den Austausch eines Gluons beschreibt:



(i) Berechnen Sie mittels der FEYNMAN-Regeln das Übergangsmatrixelement zu diesem Diagramm.

(ii) Wie groß ist der Farbfaktor f?

(iii) Werten Sie f für den Fall einer Farbsingulett-Konfiguration aus.

(iv) Können Sie das Resultat erklären, bzw. falls Sie die vorherige Unteraufgabe nicht gelöst haben, was würden Sie erwarten und warum?

Aufgabe 67 *Quark-(Anti)-Quark-Wechselwirkung* **6 Punkte**

Betrachtet wird analog zur Vorlesung die Wechselwirkung eines Quarks und eines (Anti)-Quarks. Berechnen Sie die Farbfaktoren:

(i) Im Falle eines Quarks und eines Antiquarks für die folgenden Farboktettzustände:
   a) $B\bar{G}$,
   b) $(R\bar{R} - B\bar{B})/\sqrt{2}$,
   c) $(R\bar{R} + B\bar{B} - 2G\bar{G})/\sqrt{6}$.

(ii) Im Falle zweier Quarks für die Farbsextettkonfiguration $(RB + BR)/\sqrt{2}$.

Aufgabe 68 *Hadronkollisionen und Rapidität* **6 Punkte**

Zur Beschreibung inelastischer Hadron-Hadron-Kollisionen wie $p\bar{p} \to X$ wird oft die sogenannte Rapidität

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right) \tag{4}$$

zur Charakterisierung der Kinematik der Sekundärteilchen benutzt. Dabei ist $p_L = p_z$ der Longitudinalimpuls entlang der z-Achse, die der Strahlachse entspricht, und E die Energie der Teilchen im Endzustand. Der restliche Anteil des Impulses ist dann der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Die Masse jedes Teilchens sei m.

Die Rapidität beschreibt die Verteilung der Longitudinalimpulse der in den Kollisionen produzierten Hadronen. Im folgenden soll gezeigt werden, dass durch y auch die Winkelverteilung der Sekundärteilchen beschrieben wird. Weiterhin wird eine Beziehung zwischen der durchschnittlichen Multiplizität, also der Anzahl der Hadronen im Endzustand, und der Schwerpunktsenergie hergeleitet.

Mathematisch kann die Rapidität als der Pseudowinkel eines Lorentz-Boosts mit $\beta = p_L/E$ entlang der z-Achse interpretiert werden. Die entsprechenden Gleichungen lauten dann:

$$E' = \cosh(y)E - \sinh(y)p_L \tag{5}$$
$$p'_L = -\sinh(y)E + \cosh(y)p_L \tag{6}$$

(i) Zeigen Sie durch Vergleich mit den bekannten Lorentz-Transformationen, dass die Beziehung $\tanh(y) = \beta$ gilt.

(ii) Leiten Sie damit Gleichung 4 her. (Tipp: *arctanh*$(z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$.)

(iii) Wie verändert sich die Rapidität eines Teilchens unter einem Lorentz-Boost in z-Richtung mit β? Geben Sie eine Beziehung zwischen y' und y an. Was geschieht mit der Rapiditätsdifferenz zweier Teilchen und was mit der Rapiditätsverteilung eines Ensembles von Teilchen?

(iv) Welcher Streuwinkel und welche Rapidität entspricht $p_L = 0$? Zeigen Sie, dass gilt: $y(-p_L) = -y(p_L)$.

(v) Zeigen Sie, dass die Rapidität auch geschrieben werden kann als:

$$y = \ln \left(\frac{E + p_L}{\sqrt{p_T^2 + m^2}} \right). \tag{7}$$

(vi) Um die Extremalwerte der Rapidität zu bestimmen, sei im folgenden eine Streureaktion von nur zwei Teilchen der Masse m in ihrem Schwerpunktsystem mit $E_{CM} = \sqrt{s}$ betrachtet. Wie groß ist die Energie der Teilchen im Endzustand und wie groß ist ihr maximaler Lonhgitudinalimpuls. (Tipp: Vernachlässigen Sie hier die Masse.) Bestimmen Sie daraus die Extremalwerte y_{max} bzw. y_{min} der Rapidität in Abhängigkeit von $\sqrt{s}$.
Ergebnis:

$$y_{max} = -y_{min} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{m^2} \right). \tag{8}$$

(vii) FEYNMAN postulierte, dass für kleine Longitudinalimpulse der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Hadronen im Endzustand gegeben ist als:

$$d^2\sigma = \pi F_{p_T} dp_T^2 V(dp_L/E), \tag{9}$$

wobei B eine Konstante ist und F_{p_T} eine nur schwach von p_T abhängende und im folgenden als konstant angenommene Funktion ist.
Ermitteln Sie einen Ausdruck für dp_L/dy. Integrieren Sie $d^2\sigma$ über p_T^2 und zeigen Sie, dass $\frac{d\sigma}{dy}$ konstant ist. Zeichnen Sie $\frac{d\sigma}{dy}$ im Intervall $[y_{min}, y_{max}]$.

(viii) Die durchschnittliche Teilchenmultiplizität $< n >$ erhält man durch Integration von $\frac{d\sigma}{dy}$ über y. Bestimmen Sie $< n >$ als Funktion von $\sqrt{s}$ mittels der Resultate für y_{min} und y_{max}.

(ix) Oft wird auch die Pseudorapidität η benutzt, die definiert ist als:

$$\eta = -\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{10}$$

wobei θ der Streuwinkel bezüglich der z-Achse ist. Zeigen Sie, dass für masselose Teilchen Rapidität und Pseudorapidität identisch sind.