Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung IV

Matthew Beckingham und Henrik Nilsen

19.11.2009

Anweseheitsaufgaben

Aufgabe 11 *Transformationsmethode*

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach einer Potenzverteilung

$$f(x) = (n+1)x^n,\ 0 \leq x \leq 1,\ n > -1 \tag{1}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = r^{\frac{1}{n+1}}. \tag{2}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der log-Weibull-Verteilung

$$f(x) = \exp(-x - \exp(-x)) \tag{3}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = -\ln(-\ln r). \tag{4}$$

Aufgabe 12 *Unabhängigkeit von $\overline{x}$ und s^2 im Falle einer Gaussverteiluing*

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Schätzer auf den Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und die Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ für einen Satz von Zufallsvariablen x_i unabhängig sind, falls die x_i nach einer Gaussverteilung $N(\mu,\sigma)$ verteilt sind.

Betrachten Sie dazu zunächst die Identität:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2, \tag{5}$$

die auch als $a = b + c$ geschrieben werden kann. Dabei sind a und b gemäss χ^2 -Verteilungen $f_{\chi^2}(a;n)$ bzw. $f_{\chi^2}(b;n-1)$ verteilt. Setzen Sie zusätzlich $c = d^2 = \left(\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$, wobei d gemäss einer Standardnormalverteilung $N(0{,}1)$ verteilt ist. Wenn Sie zeigen können, dass b and c voneinander unabhängig sind, so ist bewiesen, dass $\overline{x}$ und s^2 unabhängige Zufallsvariablen sind.

(i) Zeigen Sie, dass d gemäss $N(0{,}1)$, und c gemäss einer χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad $f_{\chi^2}(c;1)$ verteilt sind.

(ii) Stellen Sie damit die charakteristischen Funktionen für a, b and c auf. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen drei Funktionen?

(iii) Was bedeutet dieser Zusammenhang zwischen den charakteristischen Funktionen von a, b and c für die Zufallsvariablen b und c?

Aufgabe 13 *Summe zweier Gaussverteilungen*

Betrachtet sei eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$, die die Summe zweier Gaussverteilungen, beide mit gleichen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 0.2$, aber verschiedenen Mittelwerten $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 3$, sein soll:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi \times 0.2^2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2 \times 0.2^2} \right) + 3 \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2 \times 0.2^2} \right) \right] \quad (6)$$

Benutzen Sie im folgenden die Akzeptanz-Zurückweisungs-Methode.

(i) Berechnen Sie die Effizienz, wenn man $f(x)$ im Bereich $0 < x < 4$ integriert mittels der Akzeptanz-Zurückweisungs-Methode mit gleichverteilte Zufallszahlen im bereich $0 < x < 4$ und $0 < y < 1.5$.

(ii) Spalten Sie diesen Bereich jetzt in zwei Bereiche auf: $0 < x < 2$, $0 < y < 0.5$ und $2 < x < 4$, $0 < y < 1.5$. Berechnen Sie die Effizienz für die Integration von $f(x)$ über diese beiden disjunkten Bereiche.

(iii) Beschreiben Sie in Worten, wie Sie ein Programm schreiben würden, um die Integration aus (ii) durchzuführen. (Sie brauchen keinen Programmcode aufzuschreiben!)

Hausaufgaben

Aufgabe 14 *Studentsche t-Verteilung* **7 Punkte**

Betrachten Sie zwei Variablen: die erste, x, ist eine Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ und die zweite, u, ist eine Chi-Quadrat verteilte Variable mit ν Freiheitsgraden, $\chi^2(\nu)$. x und ν seien unabhängig. Wenn die Variable t definiert ist als

$$t \equiv \frac{x}{\sqrt{u/\nu}} \qquad -\infty \leq t \leq \infty; \nu > 0 \quad (7)$$

dann ist diese gemäß der WDF

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}} \quad (8)$$

verteilt, welche auch 'Studentische t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden' genannt wird.

- Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable t gemäss der Studentischen t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden verteilt ist. Betrachten Sie die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x,u;\nu)$, für x und u, transformieren Sie auf die WDF $f(t,v;\nu)$, wobei $t = \frac{x}{\sqrt{\frac{u}{\nu}}}$ und $v = u$, und marginalisieren Sie schliesslich $f(t,v;\nu)$ über v.
- Zeigen Sie, dass sich $f(t;\nu)$ für $\nu = 1$ als Cauchyverteilung ergibt.
- Zeigen Sie, dass sich $f(t;\nu)$ im Grenzfall $\nu \to \infty$ als Standardnormalverteilung $N(0,1)$ ergibt.

Aufgabe 15 *Transformationsmethode für die Cauchy und die Breit-Wigner-Verteilung* **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = \tan\left[\pi(r - \frac{1}{2})\right]. \quad (10)$$

(ii) Betrachten Sie jetzt die Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma} \cdot \frac{\Gamma^2}{4 \cdot (x - x_0)^2 + \Gamma^2}. \tag{11}$$

Benutzen Sie das Ergebnis aus (i), um eine Transformation zu ermitteln, mit der sich Breit-Wigner-verteilte Zufallszahlen erzeugen lassen.

Aufgabe 16 *Zusammenhang zwischen Kumulativverteilungen der Poisson- und der χ^2-Verteilungen*

4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Kumulativverteilung der Poissonverteilung $p(r;\mu)$ gegeben ist durch

$$F_p(k;\mu) = \sum_{r=0}^{k} p(r;\mu) = 1 - \int_0^{2\mu} f(u; \nu = 2k+2)\, du \tag{12}$$

wobei $f(u;\nu)$ die χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden ist.

Aufgabe 17 *Transformationsmethode etwas trickreicher* **5 Punkte**

(i) In Aufgabe 7 wurde gezeigt, dass das Produkt $z = x_1 x_2$ zweier gleichverteilter Zufallszahlen $x_1 x_2$ im Intervall [0,1] verteilt ist gemäß $f(z) = -\ln z$ benutzen Sie dieses Ergebnis und die Transformationsvorschrift für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, um zu zeigen, dass man Zufallszahlen gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(x) = xe^{-x} \qquad 0 < x < \infty \tag{13}$$

erzeugen kann durch die Transformation:

$$x = -\ln(x_1 x_2). \tag{14}$$

(ii) Zeigen Sie, dass man Zufallszahlen gemäß einer Gauss-Verteilung (zunächst mit $\sigma = 1$ und Mittelwert 0)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{15}$$

erzeugen kann aus zwei gleichverteilten Zufallszahlen r_1,r_2 im Intervall [0,1] erzeugen kann gemäß der Transformationsvorschrift

$$x = \sqrt{-\ln r_1^2}\cos(2\pi r_2) \tag{16}$$

Betrachten Sie dazu zunächst eine zweidimensionale Gaussverteilung $g(x,y) = f(x) \cdot f(y)$, wechseln in Polarkoordinaten r,ϕ, wenden die Transformationsmethode an und transformieren zurück.

(iii) Wie kann man aus einer gemäß (ii) erhaltenen zweidimensionalen Gaussverteilung, Gaussverteilungen mit beliebigen Breiten und Mittlwerten erhalten? Wie würde man eine korrelierte zweidimensionale Gaussverteilung erzeugen?