Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2011/2012

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung III

Markus Warsinsky

14.11.2011

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 19 *Zentraler Grenzwertsatz*

Der Zentrale Grenzwertsatz, der in der morgigen Vorlesung detailliert besprochen wird, besagt, dass die Summe von ausreichend vielen unabhängigen Zufallsvariablen durch eine Gaussverteilung beschrieben werden kann. Um den zentralen Grenzwertsatz zu demonstrieren, sollen in dieser Übung mehrere im Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen aufaddiert werden, und mit einer Gausschen Verteilungsfunktion verglichen werden.

Erstellen Sie dazu ein ROOT-Skript, dass folgende Komponenten enthält:

(i) Einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3`.

(ii) Erzeugen Sie mittels dieses Zufallszahlengenerators gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Benutzen Sie eine `for`-Schleife, um dies genau `NVar`-mal zu machen (am besten erstellen Sie `NVar` als Ganzzahlvariable am Anfang des Makros, diese Zahl wird später noch benötigt).

(iii) Füllen Sie die Summe dieser `NVar` Zufallszahlen in ein Histogramm mit geeigneten Bingrenzen. Benutzen Sie eine Ganzzahlvariable `int nbins`, um sich die Anzahl der Bins im Histogramm zu merken, da dies später noch benötigt wird.

(iv) Schachteln Sie dieses Vorgehen in eine zweite `for`-Schleife, in der Sie das Zufallsexperiment `nexp`-mal wiederholen. Auch diese Zahl merken Sie sich, indem Sie eine Ganzzahlvariable am Anfang des Skriptes erstellen. Achten Sie darauf, den Zufallszahlengenerator und das Histogramm ausserhalb der `for`-Schleifen zu erstellen.

(v) Zeichnen Sie das Histogramm auf dem Bildschirm.

(vi) Zeichnen Sie zum Vergleich eine Gaussfunktion ein. Dies kann mit Hilfe der folgenden Befehle, die nach dem Zeichnen des Histogramms erledigt werden müssen, gemacht werden:

```
TF1 funktion = TF1("funktion",
   "[0]/([1]*sqrt(2*acos(-1)))*exp(-(x-[2])**2/(2*[1]**2))",0,NVar);
funktion.SetParameter(0,NVar*nexp/nbins);
funktion.SetParameter(1,sqrt(NVar/12.));
funktion.SetParameter(2,NVar/2.);
funktion.Draw("same");
```

Dabei ist `NVar` die Anzahl der in jedem Zufallsexperiment aufaddierten Variablen, `nexp` die Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente und `nbins` die Anzahl der Histogrammbins.

Starten Sie zunächst mit nur einer Zufallsvariablen (`NVar=1`). Erhöhen Sie nun die Anzahl schrittweise. Wieviele gleichförmig verteilte Zufallsvariablen sollte man mindestens addieren, um eine gute Annäherung an die Gaussfunktion zu erhalten?

Aufgabe 20 *Produkt zweier gleichverteilter Zufallszahlen*

In Hausaufgabe 15 haben Sie gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Produktes zweier gleichverteilter, unabhängiger Größen x_1,x_2 zwischen 0 und 1 gegeben ist durch $-\ln z$, $z = x_1 x_2$.

(i) Schreiben Sie ein ROOT-Makro, um zwei Zufallszahlen zu generieren, ihr Produkt zu bilden, in ein Histogramm zu füllen und es schliesslich auszugeben. Erzeugen Sie sich dazu einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3`, erstellen innerhalb einer `for`-Schleife zwei Zufallszahlen (`Uniform()`) und füllen das Produkt in ein Histogramm.

(ii) Normieren Sie das Histogramm auf die Gesamtanzahl der Einträge.

(iii) Zeichnen Sie die erwartete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ein, indem Sie die ROOT-Klasse `TF1` benutzen. Die dazu notwendige Syntax lautet

```
TF1 funktion=TF1("funktion","-log(x)/[0]",0,1);
funktion.SetParameter(0,nbins);
funktion.Draw("same");
```

Beachten Sie, dass hierbei durch die Anzahl der Histogrammbins `nbins` zu dividieren ist.

Stimmt das Ergebnis mit der Erwartung überein?

Hausaufgaben

Aufgabe 21 *Huftritte* **3 Punkte**

In 10 Regimenten der preussischen Armee starben in 20 Jahren 122 Soldaten an den Folgen eines Huftritts, siehe folgende Tabelle:

Anzahl i der Todesfälle pro Jahr pro Regiment	Anzahl n_i der Jahre mit i beobachteten Todesfälle
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
≥ 5	0

(i) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten der Todesfälle pro Jahr und Regiment.

(ii) Wie groß ist die durchschnittliche Todesrate pro Jahr und Regiment?

(iii) Nehmen Sie diese mittlere Todesrate als Mittelwert einer Poissonverteilung an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_i für i Todesfälle pro Jahr und Regiment. Wieviele Jahre mit i Todesfällen würde man gemäß dieser Wahrscheinlichkeiten erhalten?

Aufgabe 22 *Gleichverteilung* **3 Punkte**

Betrachtet sei eine gleichverteilte Zufallsvariable im Intervall $[a,b]$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert und die Varianz ergeben zu:

$$E[x] = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Aufgabe 23 *Studentsche t-Verteilung* **7 Punkte**

Betrachten Sie zwei Zufallsvariablen: Die erste, x, sei nach einer Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ und die zweite, u, nach der Chi-Quadrat-Verteilung mit ν Freiheitsgraden $\chi^2(\nu)$ verteilt. x und ν seien unabhängig. Betrachten Sie nun die neue Zufallsvariable t, definiert als:

$$t \equiv \frac{x}{\sqrt{u/\nu}} \qquad -\infty \leq t \leq \infty, \nu > 0$$

(i) Zeigen Sie, dass t gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}}$$

verteilt ist. Diese wird auch Studentsche t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden genannt. Betrachten Sie dazu die kombinierte Wahrscheinlichkeitdichtefunktion $f(x,u;\nu)$ für x und u, transformieren Sie auf die WDF $f(t,v;\nu)$ mit $t = \frac{x}{\sqrt{u/\nu}}$ und $v = u$ und marginalisieren Sie schliesslich über v, um $f(t;\nu)$ als Randverteilung zu erhalten. Tipp: $\int_0^\infty x^n \exp(-a \cdot x) = \Gamma(n+1)/a^{n+1}$.

(ii) Zeigen Sie, dass sich $f(t;\nu)$ für $\nu = 1$ als Cauchyverteilung (siehe Aufgabe 25 (ii)) ergibt. (Tipps: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$.)

Aufgabe 24 *Gauss* **3 Punkte**

Betrachtet sei eine Zufallsvariable x, die Gaussverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 sei.

(i) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

verteilt ist gemäß der Standard-Normalverteilung $\phi(y)$, also einen Mittelwert von 0 und eine Varianz von 1 hat.

(ii) Zeigen Sie, dass die Kumulativfunktionen $F(x)$ und $\Phi(y)$ identisch sind, d.h.

$$F(x) = \Phi(\frac{x - \mu}{\sigma})$$

Aufgabe 25 *Transformationsmethode* **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach einer Potenzverteilung

$$f(x) = (n+1)x^n, 0 \leq x \leq 1, n > -1$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = r^{\frac{1}{n+1}}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = \tan\left[\pi(r - \frac{1}{2})\right].$$

(iii) Betrachten Sie jetzt die Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma} \frac{\Gamma^2}{4 \cdot (x - x_0)^2 + \Gamma^2}.$$

Benutzen Sie das Ergebnis aus (iii), um eine Transformation zu ermitteln, mit der sich Breit-Wigner-verteilte Zufallszahlen erzeugen lassen.