Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Wintersemester 2011/2012

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher

Übung IV

Markus Warsinsky

21.11.2011

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 26 *Zufallsgenerator für einen Teilchenzerfall*

In dieser Übung werden wir die Transformationsmethode anwenden, um Zufallszahlen $\vec{x}$ zu erzeugen, die gemäss der Exponentialverteilung

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{x}{\tau}\right)$$

verteilt sind. Die Variablen $\vec{x}$ könnten beispielsweise die Zerfallszeiten eines Teilchens mit Lebensdauer τ repräsentieren.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Erstellen Sie einen Zufallsgenerator vom Typ `TRandom3`.

(ii) Erstellen Sie eine `for`-Schleife, die für die Zufallsexperimente steht. Erstellen Sie innerhalb der `for`-Schleife gleichverteilte Zufallszahlen mittels der `Uniform`-Methode. Diese können Sie mit der Transformationsvorschrift

$$x(r) = -\tau \ln r$$

in exponentiell verteilte Zufallszahlen umwandeln. Erstellen Sie dazu am Anfang des Skriptes eine Fliesskommazahl `float tau=2.;`, um sich diese Variable zu merken (der Wert 2 wurde hier nur beispielhaft gewählt.)

(iii) Erstellen Sie vor der `for`-Schleife ein Histogramm mit geignetem Binning, in welches Sie dann innerhalb der `for`-Schleife die exponentiell verteilten Zufallszahlen einfüllen und anschliessend graphisch darstellen.

(iv) Ausserdem wollen wir die erzeugten Werte für die Zufallsvariablen (sowohl die gleichverteilten, als auch die exponentiell verteilten) in einen sogenannten `TTree` einfüllen und diesen in einer Datei abspeichern. Benutzen Sie dazu die folgenden Kommandos:

```
TFile myfile=TFile("myfile.root","RECREATE");
TTree mytree=TTree("mytree","mytree");
```

Hiermit wird eine Datei mit Dateinamen `myfile.root` angelegt. Anschliessend wird ein `TTree`-Objekt angelegt, welches den Namen `mytree` erhält. Um nun Variablen vorzubereiten, um sie in den `TTree` einzufüllen, gehen Sie wie folgt vor (immer noch ausserhalb der `for`-Schleife!):

```
float expzufall;
mytree.Branch("expzufall",&expzufall,"expzufall/F");
```

Damit wird eine Variable names `expzufall` im `TTree` vorbereitet, so dass Sie eingefüllt werden kann. Um den aktuellen Werte einer Variablen innerhalb der `for`-Schleife einzufüllen, stellen Sie sicher, dass `expzufall` auf dem gewünschten Wert steht und füllen sie in den `TTree` mittels

```
mytree.Fill();
```

Am Ende des Skriptes sollten Sie dann noch sicherstellen, dass der erstellte `TTree` ausgeschrieben wird, und die erstellte Datei ordnungsgemäß geschlossen wird:

```
mytree.Write();
myfile.Write();
myfile.Close();
```

(v) Öffnen Sie die von Ihnen erstellte Datei mittels des sogenannten `TBrowser` und stellen Sie sicher, dass in der Tat Variablen eingefüllt wurden.

(vi) Wenn alles funktioniert, benutzen Sie nun das von Ihnen erstellte Skript, um exponentiell verteilte Zufallszahlen ($0 \leq \tau \leq 5$) mit einem Stichprobenumfang von 100 zu erstellen und diese Zahlen in einer Datei mittels des `TTree` abzuspeichern. Lassen Sie niemanden den von Ihnen benutzten Wert von τ wissen (aber merken Sie ihn sich selber)! In einer der nächsten Übungen sollten Sie Ihre erzeugte Datei mit einem anderen Übungsteilnehmer tauschen, und versuchen herauszufinden, welchen Wert von τ der jeweils andere benutzt hat. Wie dies bewerkstelligt werden kann, wird in einer der nächsten Vorlesungen besprochen werden.

Aufgabe 27 *Zeitdifferenz zwischen radioaktiven Zerfällen*

Betrachten Sie den radioaktiven Zerfall eines Isotopes mit Zerfallskonstante λ. Angenommen, es gäbe ein Gerät zur Bestimmung der Zeitdifferenz Δt zwischen zwei Zerfällen des Isotopes. Falls Sie eine Anzahl von Zeitdifferenzen Δt_i über eine Gesamtzeit von t messen, wie viele Einzelmessungen werden Sie durchführen? Sofern die Annahme gilt, dass Zerfälle von einzelnen Atomen unabhängig voneinander sind, ist die WDF für eine Anzahl von Zeitdifferenzen n gegeben durch die Poisson-Verteilung

$$f(n;t,\lambda) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Um $f(n;t,\lambda)$ mit $t = 1$ und $\lambda = 6$ numerisch zu bestimmen, gehen Sie folgendermassen vor:

(i) Benutzen Sie einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3` um eine zufällige Zerfallszeit einer exponentiellen WDF auszugeben

```
myrand.Exp(tau);
```

wobei `tau` für die Zerfallskonstante der Exponentialverteilung ($\tau = 1/\lambda$) steht.

(ii) Verwenden Sie dann eine `while`-Schleife um alle Zerfallszeiten bis zu einem Maximalwert aufzuaddieren. Eine `while`-Schleife kann in der Form

```
while (Bedingung == wahr){
mache etwas
}
```

geschrieben werden, so dass die Schleife fortwährend ausgeführt wird, solange die Bedingung (in dieser Übung `sum < maxsum`) wahr ist. Nehmen Sie als Maximalwert $t = 1$ an.

(iii) Zählen Sie, wie oft die Schleife ausgeführt wird (was demzufolge der Anzahl an Zerfällen entspricht) und füllen Sie diese Zahl in ein Histogramm. Beachten Sie bitte, dass die `while`-Schleife eventuell nur einmal ausgeführt wird, was bedeutet, dass innerhalb des Zählfensters kein Zerfall registriert wurde!

(iv) Führen Sie diese Befehlsabfolge innerhalb einer weiteren `for`-Schleife aus um das Experiment 10000 Mal durchzuführen.

(v) Normieren Sie Ihr Histogramm auf 1 um die WDF für diese Anzahl an Messungen zu erhalten.

(vi) Zeichnen Sie dann das Histogramm für die Anzahl an Messungen n unter Verwendung der Methode `hist.Draw();`. Vergleichen Sie jetzt die Verteilung Ihrer Anzahl an Messungen mit der Poisson-Verteilung. Gehen Sie folgende Schritte durch:

(i) Erzeugen Sie eine eindimensionale Funktion (TF1) um die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von n berechnen zu können.

```
TF1 funk = TF1("funk","TMath::Poisson(x,[0]*[1])", 0.0, 50);
```

wobei `funk` für den Namen der Funktion steht, und [0] und [1] zwei Parameter sind (λ, beziehungsweise t).

(ii) Legen Sie beide Parameter fest, beispielsweise Parameter 0 auf den Wert 1.0, indem Sie die folgende TF1-Methode benutzen:

```
funk.SetParameter(0,1.0);
```

(iii) Zeichnen Sie die Funktion mit dem Befehl `funk.Draw()`.

Hausaufgaben

Aufgabe 28 *Summe von gleichverteilten Zufallsvariablen* **3 Punkte**

Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariable x gleichverteilt im Intervall [0,1] ist. Betrachten Sie nun die Summe von n unabhängigen Werte von x

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(i) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von y gegeben ist durch $n/2$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Varianz gegeben ist durch $n/12$.

(iii) Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass die Zufallsvariable

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

einen Erwartungswert von 0 und Standardabweichung 1 hat.

Aufgabe 29 *Inverse gleichverteilte Zufallsvariable* **3 Punkte**

Nehmen Sie an, die Zufallsvariable x sei gleichverteilt im Intervall $[\alpha,\beta]$.

(i) Finden Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $y = 1/x$.

(ii) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $1/E[x]$ für $\alpha = 1,\beta = 2$.

Aufgabe 30 *Erwartungstreue* **6 Punkte**

Gegeben Sei eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ vom Umfang n.

(i) Zeigen Sie, dass der Schätzer für den Mittelwert der wahren Verteilung

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

erwartungstreu ist.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bekannt ist. Zeigen Sie, dass der Schätzer für die Varianz der wahren Verteilung

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

erwartungstreu ist.

(iii) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes nicht bekannt ist und stattdessen der Schätzer aus (i) verwendet wird. Zeigen Sie, dass die so erhaltene Varianz nicht erwartungstreu ist.

(iv) Wie muss man den Schätzer für die Varianz modifizieren, um zu einem erwartungstreuen Schätzer zu kommen?

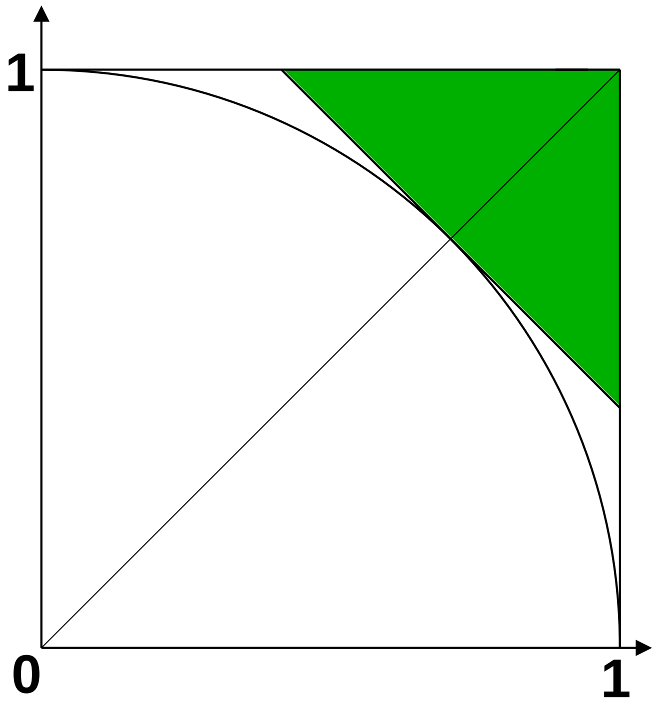
(v) Zeigen Sie, dass ein erwartungstreuer Schätzer auf $\langle (x-\mu)^3 \rangle$ gegeben ist durch

$$\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3.$$

Tipp: Nehmen Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu = 0$ an.

Aufgabe 31 *Effiziente Bestimmung von π* **5 Punkte**

Eine beliebte Möglichkeit zur Bestimmung der Kreiszahl π besteht im Ausnutzen der Monte-Carlo-Methode. Dazu kann man die von-Neumannsche Akzeptanz-Zurückweisungsmethode benutzen. Betrachtet sei dazu ein Quadrant des Einheitskreises, wie in der folgenden Abbildung skizziert.



Die Bestimmung von π geschieht nun dadurch, dass man im oberen rechten Quadranten N_0 gleichverteilte Paare von Zufallszahlen würfelt. Von diesen liegen dann N innerhalb des Einheitskreises.

(i) Geben Sie einen Schätzer $\hat{\pi}$ für die Kreiszahl π basierend auf N und N_0 an.

(ii) Ermitteln Sie den relativen statistischen Fehler $\Delta\hat{\pi}/\hat{\pi}$ auf diesen Schätzer in Abhängigkeit von N_0 und $\hat{\pi}$. (Tipp: Es handelt sich um ein binomial verteiltes Zufallsexperiment! Nehmen Sie an, dass der Schätzer $\hat{\pi}$ nahe am wahren Wert ist, und ersetzen Sie $\hat{\pi}$ numerisch durch den bekannten Wert von π, um nur noch eine Abhängigkeit von N_0 zu haben.)

(iii) Nun besteht die Möglichkeit, nicht im gesamten Viereck zu würfeln, sondern wie skizziert, ein Dreieck oben rechts (symmetrisch bezüglich der Diagonalen) herauszuschneiden und nur innerhalb dieses Polygons gleichverteilte Punkte zu erzeugen. Geben Sie nun wieder einen Schätzer $\hat{\pi}$ an. Was passiert mit dem relativen Fehler $\Delta\hat{\pi}/\hat{\pi}$?

(iv) Um die Bestimmung von π weiter zu optimieren, kann man weiterhin ein inneres Quadrat entfernen, welches durch den Berührungspunkt des äusseren Dreiecks an den Kreis sowie den Ursprung definiert werden kann. Geben Sie auch für diesen Fall einen Schätzer $\hat{\pi}$ an. Was passiert mit dem relativen Fehler $\Delta\hat{\pi}/\hat{\pi}$?

Aufgabe 32 *Transformationsmethode etwas trickreicher* **3 Punkte**

In Aufgabe 15 wurde gezeigt, dass das Produkt $z = x_1 x_2$ zweier gleichverteilter Zufallszahln x_1,x_2 im Intervall [0,1] verteilt ist gemäss $f(z) = -\ln z$. Benutzen Sie dieses Ergebnis und die Transformationsvorschrift für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, um zu zeigen, dass man Zufallszahlen gemäss der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(x) = xe^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$

erzeugen kann durch die Transformation:

$$x = -\ln(x_1 x_2)$$