Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher, Stan Lai, Florian Kiss

Übung III

09.11.2012, 13.11.2012

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 17 *Zentraler Grenzwertsatz*

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe von ausreichend vielen unabhängigen Zufallsvariablen durch eine Gaussverteilung beschrieben werden kann. Um den zentralen Grenzwertsatz zu demonstrieren, sollen in dieser Übung mehrere im Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen aufaddiert werden, und mit einer Gausschen Verteilungsfunktion verglichen werden.

Erstellen Sie dazu ein ROOT-Skript, dass folgende Komponenten enthält:

(i) Einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3`.

(ii) Erzeugen Sie mittels dieses Zufallszahlengenerators gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Benutzen Sie eine `for`-Schleife, um dies genau `NVar`-mal zu machen (am besten erstellen Sie `NVar` als Ganzzahlvariable am Anfang des Makros, diese Zahl wird später noch benötigt).

(iii) Füllen Sie die Summe dieser `NVar` Zufallszahlen in ein Histogramm mit geeigneten Bingrenzen. Benutzen Sie eine Ganzzahlvariable `int nbins`, um sich die Anzahl der Bins im Histogramm zu merken, da dies später noch benötigt wird.

(iv) Schachteln Sie dieses Vorgehen in eine zweite `for`-Schleife, in der Sie das Zufallsexperiment `nexp`-mal wiederholen. Auch diese Zahl merken Sie sich, indem Sie eine Ganzzahlvariable am Anfang des Skriptes erstellen. Achten Sie darauf, den Zufallszahlengenerator und das Histogramm ausserhalb der `for`-Schleifen zu erstellen.

(v) Zeichnen Sie das Histogramm auf dem Bildschirm.

(vi) Zeichnen Sie zum Vergleich eine Gaussfunktion ein. Dies kann mit Hilfe der folgenden Befehle, die nach dem Zeichnen des Histogramms erledigt werden müssen, gemacht werden:

```
TF1 funktion = TF1("funktion",
   "[0]/([1]*sqrt(2*acos(-1)))*exp(-(x-[2])**2/(2*[1]**2))",0,NVar);
funktion.SetParameter(0,NVar*nexp/nbins);
funktion.SetParameter(1,sqrt(NVar/12.));
funktion.SetParameter(2,NVar/2.);
funktion.Draw("same");
```

Dabei ist `NVar` die Anzahl der in jedem Zufallsexperiment aufaddierten Variablen, `nexp` die Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente und `nbins` die Anzahl der Histogrammbins.

Starten Sie zunächst mit nur einer Zufallsvariablen (`NVar=1`). Erhöhen Sie nun die Anzahl schrittweise. Wieviele gleichförmig verteilte Zufallsvariablen sollte man mindestens addieren, um eine gute Annäherung an die Gaussfunktion zu erhalten?

Aufgabe 18 *Produkt zweier gleichverteilter Zufallszahlen*

In Hausaufgabe 19 werden Sie zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Produktes zweier gleichverteilter, unabhängiger Größen x_1,x_2 zwischen 0 und 1 gegeben ist durch $-\ln z$, $z = x_1 x_2$.

(i) Schreiben Sie ein ROOT-Makro, um zwei Zufallszahlen zu generieren, ihr Produkt zu bilden, in ein Histogramm zu füllen und es schliesslich auszugeben. Erzeugen Sie sich dazu einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3`, erstellen innerhalb einer `for`-Schleife zwei Zufallszahlen (`Uniform()`) und füllen das Produkt in ein Histogramm.

(ii) Normieren Sie das Histogramm auf die Gesamtanzahl der Einträge.

(iii) Zeichnen Sie die erwartete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ein, indem Sie die ROOT-Klasse `TF1` benutzen. Die dazu notwendige Syntax lautet

```
TF1 funktion=TF1("funktion","-log(x)/[0]",0,1);
funktion.SetParameter(0,nbins);
funktion.Draw("same");
```

Beachten Sie, dass hierbei durch die Anzahl der Histogrammbins `nbins` zu dividieren ist.

Stimmt das Ergebnis mit der Erwartung überein?

Hausaufgaben

Aufgabe 19 *Variablentransformation* **3 Punkte**

Betrachtet seien zwei Zufallsvariablen x_1 und x_2 mit zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$. Die beiden Zufallsvariablen seien unabhängig, das heisst für die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung gilt:

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

Zeigen Sie: Falls x_1 und x_2 in zwei neue Zufallsvariablen y_1 und y_2 transformiert werden, so dass $y_1 = y_1(x_1)$ und $y_2 = y_2(x_2)$ gilt, so sind auch die beiden neuen Zufallsvariablen unabhängig voneinander.

Aufgabe 20 *Mellinfaltung* **4 Punkte**

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen x und y, die beide gleichverteilt sind zwischen 0 und 1, d.h. ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

und analog durch $h(y)$. Benutzen Sie die Mellin-Faltung, um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(z)$ von $z = xy$ gegeben ist durch:

$$f(z) = \begin{cases} -\ln z & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Aufgabe 21 *Fehlerfortpflanzung I* **2 Punkte**

Nehmen Sie an, sie möchten die Länge eines Werkstücks möglichst exakt wissen. Was ist zu bevorzugen, um eine möglichst genaue Messung zu erhalten:

- Eine Einzelmessung mit einer Genauigkeit von 0,2 mm, oder
- eine 10-fache unabhängige Messung mit einer Genauigkeit von 1 mm?

Aufgabe 22 *Fehlerfortpflanzung II* **2 Punkte**

Zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U, dem Widerstand R und dem fliessenden Strom I besteht der Zusammenhang (Ohmsches Gesetz)

$$U = R \cdot I.$$

(i) Nehmen Sie an, der Strom wurde gemessen zu $I = 1120 \pm 10\,\mathrm{mA}$ und der Widerstand zu $1400 \pm 30\,\Omega$. Berechnen Sie den Wert der Spannung und ihren Fehler.

(ii) Nehmen Sie an, die Spannung wurde gemessen zu $U = 45 \pm 1\,\mathrm{V}$ und der Widerstand zu $900 \pm 10\,\Omega$. Berechnen Sie den Wert des Stromes und seinen Fehler.

Aufgabe 23 *Fehlerfortpflanzung III* **2 Punkte**

Gegeben sei ein Winkel $\theta = 0{,}56 \pm 0{,}01$. Wie groß sind die Fehler auf $\sin\theta$, $\cos\theta$ und $\tan\theta$? Wie groß sind sie für den Fall $\theta = 1{,}56 \pm 0{,}01$?

Aufgabe 24 *Gleichverteilung* **3 Punkte**

Betrachtet sei eine gleichverteilte Zufallsvariable im Intervall $[a,b]$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert und die Varianz ergeben zu:

$$E[x] = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Aufgabe 25 *Gauss* **4 Punkte**

Betrachtet sei eine Zufallsvariable x, die Gaussverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 sei.

(i) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

verteilt ist gemäß der Standard-Normalverteilung $\phi(y)$, also einen Mittelwert von 0 und eine Varianz von 1 hat.

(ii) Zeigen Sie, dass die Kumulativfunktionen $F(x)$ und $\Phi(y)$ identisch sind, d.h.

$$F(x) = \Phi(\frac{x - \mu}{\sigma})$$