Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2012/2013

Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher, Stan Lai, Florian Kiss

Übung IX

08.01.2013, 11.01.2013

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 53 *χ^2-Anpassung an simulierte Z^0-Produktionsdaten*

In diesem Beispiel soll eine χ^2-Anpassung an einen simulierten Datensatz von Produktionswirkungsquerschnitten für Z^0-Bosonen in e^+e^--Kollisionen durchgeführt werden. Mit einem (Ihnen vorerst nicht zur Verfügung stehenden) ROOT-Makro `ZPeakGen.C` wurden Z^0-Boson-Produktionswirkungsquerschnitte als Funktion der Schwerpunktsenergie E_{cm} generiert und jeder Datenpunkt gemäß einer Gaussverteilung verschmiert. Die Gaussverteilung hatte dabei nicht für jedes E_{cm} dieselbe Breite. Der Fehler auf E_{cm} wird als vernachlässigbar angenommen. Die resultierenden Wirkungsquerschnitte befinden sich in einer Textdatei `/home/slai/Statistics/PS9/data_aufgabe53.txt`. In dieser Übungsaufgabe sollen diese Pseudomessdaten in ROOT eingelesen werden, graphisch dargestellt, und eine χ^2-Anpassung einer Breit-Wigner-Verteilung durchgeführt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Das Einlesen der Messdaten kann relativ einfach in ein Objekt vom Typ `TGraphErrors` erfolgen. Sie können dazu einfach die folgende Syntax beim Erstellen des Objektes benutzen:

```
TGraphErrors graph=TGraphErrors("daten.txt","%lg %lg %lg");
```

Damit werden die Daten aus der Textdatei `daten.txt` eingelesen. Es wird dabei angenommen, dass die Messpunkte zeilenweise in der Textdatei stehen, und jeweils in jeder Zeile erst der x-Wert, dann der y-Wert und dann der Fehler auf y stehen.

(ii) Stellen Sie diesen TGraphErrors graphisch auf dem Bildschirm dar:

```
graph.Draw("AP");
```

(iii) Definieren Sie eine ROOT `TF1`-Funktion gemäß der Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = A\frac{\frac{\Gamma}{2}}{(x-x_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},$$

wobei Γ die Breite der Verteilung, x_0 die Position des Maximums (also die Masse des betreffenden Teilchens) und A eine Normierungskonstante ist.

(iv) Benutzen Sie diese Funktion für eine Anpassung an den `TGraphErrors`, der die simulierten Datenpunkte enthält, indem Sie den Befehl

```
graph.Fit("fitfunkname");
```

benutzen. Sie sollten vor der Ausführung der Anpassung die Parameter auf Startwerte setzen, die schon relativ nah an denen, die das χ^2 minimieren sind. Ansonsten kann es sein, dass die Anpassung aufgrund numerischer Probleme nicht konvergiert. Dies können Sie mit der Methode `TF1::SetParameter(int parnumber, float parvalue)` machen.

(v) Benutzen Sie danach die Methoden von `TF1`

```
TF1::GetChisquare()
TF1::GetNDF()
TF1::GetProb(),
```

um Informationen über die durchgeführte Anpassung zu erhalten (unter Umständen werden diese Werte auch am Bildschirm automatisch angezeigt).

(vi) Im Folgenden soll die Monte-Carlo-Methode benutzt werden, um den sogenannten P-Wert zu berechnen, und mit demjenigen aus der ROOT-Anpassung zu vergleichen. Dazu sollen Zufallsexperimente basierend auf der soeben angepassten Funktion sowie den relativen Messfehlern des Datensatzes durchgeführt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor (am Besten fügen Sie alles nach der Anpassung ein):

a) Stellen Sie einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3` bereit.

b) Stellen Sie ein eindimensionales Histogramm vom Typ `TH1F` bereit.

c) Stellen Sie eine weitere `TF1`-Funktion bereit, die für die Breit-Wigner-Anpassung in jedem Zufallsexperiment benutzt werden soll.

d) Stellen Sie einen weiteren `TGraphErrors` bereit. Um zu wissen, wieviele Punkte dieser haben muss, können Sie den ursprünglichen Graphen fragen:

```
int npoints=graph.GetN();
```

e) Um ein Zufallsexperiment zu erstellen schreiben Sie eine `for`-Schleife über alle Punkte des ursprünglichen `TGraphErrors`. Lesen Sie die x und y-Werte zum Beispiel für den `i`-ten Punkt ein wie folgt:

```
double xval, yval;
graph.GetPoint(i , xval, yval);
```

Den Fehler auf den y-Wert ermitteln Sie mit

```
double yerr=graph.GetErrorY(i);
```

Ermitteln Sie nun die Vorhersage der ursprünglich angepassten Funktion für diesen x-Wert:

```
double yfunk=funkname.Eval(xval);
```

Verschmieren Sie diesen neuen y-Wert mittels des Zufallszahlengenerators und der Methode `TRandom3::Gaus(float mean, float sigma)`. Wählen Sie für die Breite der gaussschen Verschmierung die relative Unsicherheit auf den Messwert (also `yerr/yval`), setzen den Mittelwert auf 1 und multiplizieren den Funktionswert mit der erhaltenen Zufallszahl. Ermitteln Sie ausserdem die Unsicherheit auf diesen Wert (`yfunk*yerr(yval)`). Setzen Sie dann den `i`-ten Punkt des neuen `TGraphErrors` auf die ermittelten Werte wie folgt:

```
newgraph.SetPoint(i, xval, newyval);
newgraph.SetPointError(i, 0., newyerr);
```

f) Passen Sie nach dieser `for`-Schleife die bereitgestellte Funktion an die Zufallsdaten an (unter Umständen müssen die Startwerte der Parameter angepasst werden). Wichtig: Passen Sie nicht die ursprüngliche Funktion an, ansonsten werden die bereits ermittelten Parameter überschrieben. Ermitteln Sie das minimale χ^2 und füllen Sie es in das bereitgestellte Histogramm.

g) Erstellen Sie auf diese Weise 1000 Zufallsexperimente, indem Sie das obige Vorgehen in eine zweite `for`-Schleife einschachteln.

h) Stellen Sie das Histogramm der χ^2-Werte auf dem Bildschirm dar.

i) Bestimmem Sie aus dem Histogramm der χ^2-Werte den sogenannten P-Wert dafür, ein gleich großes oder noch grösseres χ^2 wie in der ursprünglichen Anpassung zu erhalten. Benutzen Sie dazu die Methode von `TH1`

```
TH1::Integral(int binMin, int binMax),
```

mittels der man das Integral zwischen den Bins `binMin` und `binMax` erhält. Sie können die Methode von `TH1`

```
TH1::FindBin(float x)
```

benutzen, um die Binnummer für die Position `x` auf der x-Achse zu erhalten.

Hausaufgaben

Aufgabe 54 *Geradenanpassung mit Matrixmethoden* **8 Punkte**

Betrachten Sie eine Stichprobe vom Umfang N von Messwerten $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_N,y_N)$, die alle denselben Fehler σ auf die unabhängigen Messung von y_i haben sollen. Benutzen Sie die Matrixnotation der Methode der kleinsten Quadrate, um Schätzer $\hat{\theta}_0$ und $\hat{\theta}_1$ auf die Parameter einer anzupassenden Gerade der Form

$$\lambda_i = \theta_0 + \theta_1 x_i = \sum_{j=0}^{n} a_j(x_i)\theta_j = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}\theta_j$$

mit $A_{ij} = a_j(x_i)$ anzugeben.

(i) Schreiben Sie zunächst die Matrix A und die Kovarianzmatrix V auf.

(ii) Berechnen Sie die Matrix für die Schätzer $\hat{\theta}$, indem Sie die Matrizen $A^T V^{-1} A$ und $A^T V^{-1} \vec{y}$ berechnen.

(iii) Schreiben Sie die Schätzer $\hat{\theta}_0$ und $\hat{\theta}_1$ in Abhängigkeit der Erwartungswerte und Varianzen von x, y, xy sowie der Kovarianz von x und y auf.

(iv) Wie unterscheidet sich die Rechnung, wenn jeder Messwert einen nicht korrelierten, aber unterschiedlichen Fehler σ_i auf y_i hat? Schreiben Sie die Matrizen für V, $A^T V^{-1} A$, $A^T V^{-1} \vec{y}$ und somit $\hat{\theta}$ auf.

Aufgabe 55 *Methode der KQ mit Zwangsbedingungen: Winkelmessung im Dreieck* **8 Punkte**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass, um einen Satz von Messungen $\vec{y} = (y_1,y_2,\dots,y_N)$ durch eine lineare Funktion $A\vec{\theta}$ zu fitten, ein Fit mit der Methode der Linearen Kleinsten Quadrate durchgeführt werden kann. Dieser minimiert die Größe

$$\chi^2 = (\vec{y} - A\vec{\theta})^T V^{-1} (\vec{y} - A\vec{\theta}),$$

wobei V die Kovarianzmatrix der Messungen $\vec{y}$ ist.

Weiterhin wurde gezeigt, dass unter Berücksichtigung eines Satzes von K Randbedingungen $\vec{b} = (b_1,b_2,\dots,b_K)$, welche die Gleichungen $B\vec{\theta} - \vec{b} = 0$ erfüllen, die Methode der kleinsten Quadrate durch Minimierung der Größe

$$\chi^2 = (\vec{y} - A\vec{\theta})^T V^{-1} (\vec{y} - A\vec{\theta}) + 2\vec{\lambda}^T (B\vec{\theta} - \vec{b})$$

verbessert werden kann, wobei $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_K)$ ein Vektor von Lagrange-Multiplikatoren ist. Folglich muss χ^2 minimiert werden in Bezug auf $\vec{\theta}$ und $\vec{\lambda}$. Die Lösung dieses Minimierungsproblems ergibt die Schätzer

$$\hat{\vec{\theta}} = C^{-1}\vec{c} - C^{-1}B^T V_B^{-1}(BC^{-1}\vec{c} - \vec{b}) = C^{-1}\vec{c} - C^{-1}B^T \hat{\vec{\lambda}}$$

wobei $C \equiv A^T V^{-1} A$, $\vec{c} \equiv A^T V^{-1} \vec{y}$ und $V_B \equiv BC^{-1}B^T$. Die Varianz errechnet sich daher zu

$$V[\hat{\vec{\theta}}] = C^{-1} - (BC^{-1})^T V_B^{-1} (BC^{-1}).$$

Die verbesserten Schätzer für die Messungen sind gegeben durch:

$$\hat{\vec{\eta}} = A\hat{\vec{\theta}} = A\left[C^{-1}\vec{c} - C^{-1}B^T V_B^{-1}(BC^{-1}\vec{c} - \vec{b})\right],$$

mit der Varianz

$$V[\hat{\vec{n}}] = AV[\hat{\vec{\theta}}]A^T = A\left[C^{-1} - (BC^{-1})^T V_B^{-1} BC^{-1}\right] A^T.$$

Betrachten Sie nun die Messung von drei Winkeln eines Dreiecks analog zu dem Beispiel aus der Vorlesung. Die drei unkorrelierten Messungen sind gegeben durch $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3)$ mit $\sigma_i = \sigma$ und sollen gefittet werden durch die Funktion $A\vec{\theta}$ mit $\vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, wobei A die Einheitsmatrix in drei Dimensionen ist.

(i) Was sind die Werte für B und $\vec{b}$?

(ii) Berechnen Sie $\hat{\vec{\theta}}$ und $V[\hat{\vec{\theta}}]$ und somit $\hat{\vec{\eta}}$ und $V[\hat{\vec{\eta}}]$.

(iii) Wie verbessert die Zwangsbedingung auf die Messungen die Schätzungen der gemessenen Werte der Dreieckswinkel?

Aufgabe 56 *Teilchenidentifikation* **4 Punkte**

Durchquert ein geladenes Teilchen ein Gasvolumen, so erzeugt dies in dem Medium Ionisation. Die mittlere Menge hängt dabei von der Masse und dem Impuls der Teilchen ab. Daher können durch Ausarbeitung einer Testhypothese, basierend auf der gemessenen Ionisation im Gasvolumen bei bekanntem Impuls, verschiedene Teilchen identifiziert werden.

Betrachten Sie einen Strahl von Teilchen, welcher entweder Pionen oder Elektronen enthält. Man kann nun, als Funktionen der Ionisation t, die WDF $g(t|e)$ der Hypothese, dass es sich um ein Elektron handelt, sowie die WDF $g(t|\pi)$ der Hypothese, dass es sich um ein Pion handelt, aufstellen. Man wählt nun Elektronen aus, indem gefordert wird, dass $t \leq t_{cut}$:

Nehmen Sie an, dass die beiden WDFs gegeben sind durch eine um $t = 0$ zentrierte Gaussverteilung für die Elektronen und durch eine um $t = 2$ zentrierte Gaussverteilung für die Pionen. Beide Gaussverteilungen haben eine Standardabweichung von Eins. Ein Test zur Elektronselektion wird rekonstruiert, indem eine Ionisation $t \leq 1$ gefordert wird.

(i) Was ist die Signifikanz des Tests (d.h. die Wahrscheinlichkeit, Elektronen zu akzeptieren)?

(ii) Wie groß ist die Mächtigkeit des Tests gegen die Hypothese, dass das Teilchen ein Pion ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pion als Elektron akzeptiert wird?

(iii) Betrachten Sie eine Strahlzusammensetzung von 99% Pionen und 1% Elektronen. Wie groß ist die Reinheit der durch $t \leq 1$ selektierten Auswahl?