Statistische Methoden der Datenanalyse

Wintersemester 2011/2012

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Stan Lai und Prof. Markus Schumacher

Physikalisches Institut Westbau 2 OG Raum 008

Telefonnummer 07621 203 8408 (SL) / 7612 (MS)

E-Mail: Stan.Lai@physik.uni-freiburg.de

Markus.Schumacher@physik.uni-freiburg.de

http://terascale.physik.uni-freiburg.de/lehre/ws_1213/statmethoden_ws1213

Kapitel 10
Bestimmung und Interpretation von Vertrauensintervallen und Ausschlussgrenzen

Schätzung von Vetrauensintervallen

Bisher: Schätzung von Parametern und deren Varianz

Jetzt: Angabe eines Intervalls “Vertauensintervall” [a,b], welches irgendeine Wahrscheinlichkeitsaussage über Beziehung zwischen statistischer Genauigkeit der Messung und dem wahren Wert des Parameters macht.

oft wird ± 1 Standardabweichung als Vertrauensintervall(Konfidenzintervall zu 68%Vertrauensniveau/Konfidenzniveau (CL)angebeben

aber: - nimmt an dass die WDF des Schätzers eine Gaussverteilung ist
- Schwierigkeit bei Schätzwerten nahe an Physikalischen Grenzen
z.B. - Masse = -5±2 < 0 - Zählrate nahe bei oder < 0

Deutliche Unterscheidung in Interpetation des Intervalls [a,b] in den beiden Statistikschulen: Frequentisten (klassisch)
Bayesianer (subjektiv).

Interpretation von Vertrauenintervallen

Vertrauensintervall hängt von Messwerten/Stichprobe → [a,b] ist Zufallsvariable

Frequentisten: Vertrauensintervall [a,b] zu xy% CL

Interpretation: bei sehr häufiger Wiederholung identischer Messungen und Bestimmung der Vetrauensintervalle nach selber Methode, wird der Anteil von xy% der so gebildeten Vertrauensintervalle den wahren Wert des Parameters enthalten (Abdeckungswkt.)

- keine Wahrscheinlichkeitsaussage über Beziehung von wahren Wert und Intervall in einzelner Messung
- kein Problem mit Intervallen im unphysikalischen Bereich.
- Abdeckungswahrscheinlichkeit = CL

Bayesianer: Glaubwürdigeitsintervall [a,b] zu xy% CL

Interpretation: die Wahrscheinlichkeit "Grad an Glaube", dass der wahre Wert im geschätzen Intervall liegt ist xy%

- Problem mit Intervallen im unphysikalischen Bereich
- Verlangt A-Priori-Wkt. für wahren Wert des Parameters

Bestimmung Frequentistischer Vetrauensintervalle

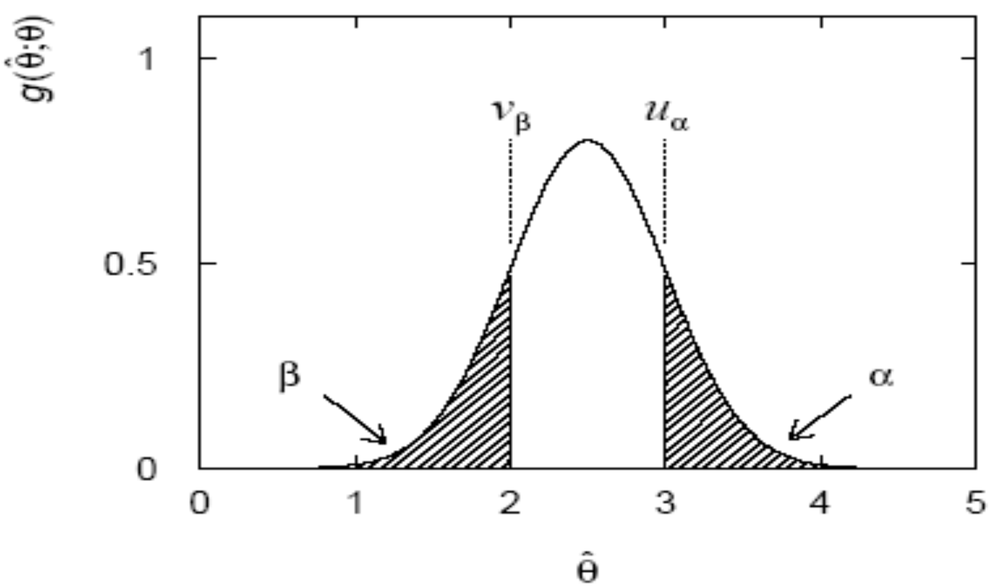
Betrachte einen Schätzer $\hat{\theta}$ für einen Parameter θ und einen Schätzwert, der aus einer Stichprobe gewonnen wird $\hat{\theta}_{\text{obs}}$.

Man braucht für alle möglichen wahren Parameter θ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Schätzer $g(\hat{\theta};\theta)$.

Spezifiziere obere und untere Ausläuferwahrscheinlichkeiten z.B. α = 0.05, β = 0.05, und bestimme die Funktionen $u_\alpha(\theta)$ and $v_\beta(\theta)$ so das gilt:

$$\alpha = P(\hat{\theta} \geq u_\alpha(\theta)) = \int_{u_\alpha(\theta)}^{\infty} g(\hat{\theta};\theta)\, d\hat{\theta}$$

$$\beta = P(\hat{\theta} \leq v_\beta(\theta)) = \int_{-\infty}^{v_\beta(\theta)} g(\hat{\theta};\theta)\, d\hat{\theta}$$



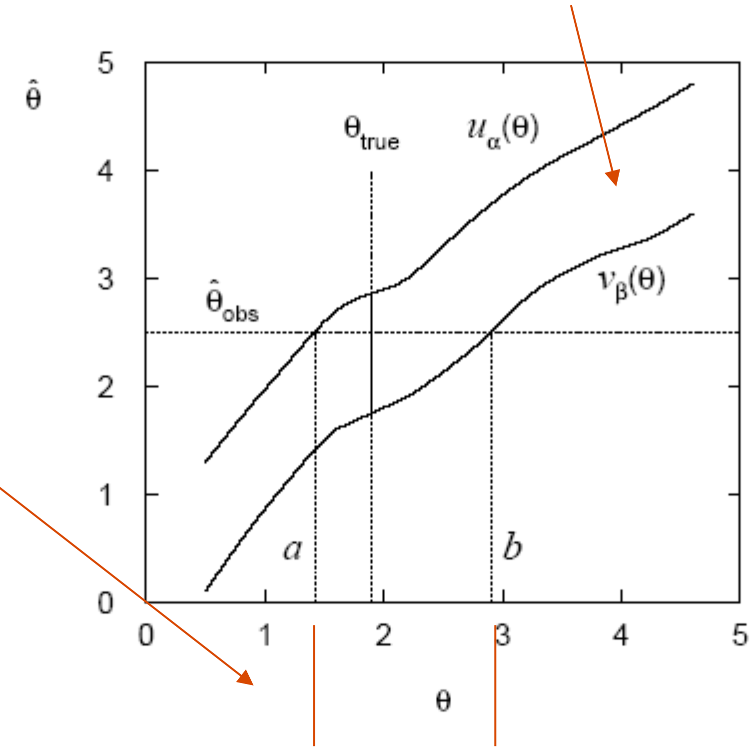
Bestimmung Frequentistischer Vetrauensintervalle

Die Region zwischen $u_\alpha(\theta)$ and $v_\beta(\theta)$ wird der Vertrauensgürtel genannt

$$P(l_\beta(\theta) \leq \hat{\theta} \leq u_\alpha(\theta)) = 1 - \alpha - \beta$$

Finde die Punkte, wo der beobachtete Schätzwert den Konfidenzgürtel schneidet→ [a,b]

$$a(\hat{\theta}) \equiv u_\alpha^{-1}(\hat{\theta})$$
$$b(\hat{\theta}) \equiv l_\beta^{-1}(\hat{\theta}).$$



Es gilt für alle Werte θ:

$$\hat{\theta} \geq u_\alpha(\theta) \Leftrightarrow a(\hat{\theta}) \geq \theta \qquad P(a(\hat{\theta}) \geq \theta) = \alpha$$
$$\hat{\theta} \leq l_\beta(\theta) \Leftrightarrow b(\hat{\theta}) \leq \theta, \qquad P(b(\hat{\theta}) \leq \theta) = \beta$$

$$P(a(\hat{\theta}) \leq \theta \leq b(\hat{\theta})) = 1 - \alpha - \beta.$$

Konfidenzeniveau = 1 - $\alpha - \beta$ = Wahrscheinlichkeit des Intervalls den wahren Wert zu enthalten (in frequentistischer Interpretation s.o.)
Gilt für jeden beliebigen wahren Wert des Parameters

KI aus Invertierung eines Hypothesentests

Das Konfidenzinterval für einen Parameter θ kann durch Definition eines Tests für den hypothetischen Wert θ gefunden werden (und mache dies für alle hypothetischen Werte θ):

Spezifiziere Werte der Daten die unverträglich mit θ sind (Kritische Region) so dass die Wahrscheinlickeit P(Daten in kritischer Region) ≤ γ für eine vorgegebenes γ, z.B., 0.05 or 0.1.
Wenn beobachtete Daten in kritischer Region, dann verwerfe den Wert von θ.

Nun invertiere den Test, um eine Konfidenzintervall zu definieren gemäß:

> Menge der θ-Werte, die nicht verworfen werden würden in einem Hypothesentest mit Signifikanzniveau γ (Konfidenzniveau ist 1 - γ).

Das Intervall wird den wahren Wert θ mit Wkt ≥ $1 - \gamma$ enthalten.
Dies ist Äquivalent zur Konstruktion des Konfidenzgürtels: der Konfidenzgürtel ist die Akzeptanzregion eines Hypotethesntests.

Beziehung zwischen CL und P-Wert

Äquivalente Sichtweise: wir betrachtem einen Signifikanztest für jeden hypothetischen Wert von θ, mit dem Ergebnis des p-Wertes, p_θ..

Wenn $p_\theta < \gamma$, dann verwerfe θ.

Das Konfidenzintervall zum Konfidenczniveau CL = 1 – γ beinhaltet die Werte für θ, die nicht verworfen werden.

Z.B. eine untere Grenze/Limit a auf θ ist der größte Wert für θ für den gilt $p_\theta \geq \gamma$.

In der Praxis finden wir den Grenzwert indem wir $p_\theta = \gamma$ setzen und diese Beziehung für θ lösen.

Oder für Signifikanzniveaus α u. β größtes a und kleinstes b finden, dass folgende Gleichungen erfüllt

$$\alpha = \int_{\hat{\theta}_{obs}}^{\infty} g(\hat{\theta}; a) d\hat{\theta} = 1 - G(\hat{\theta}_{obs}; a)$$

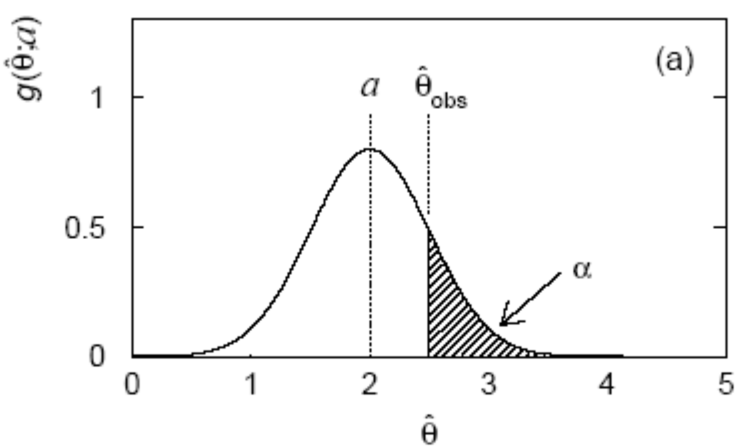
$$\beta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{obs}} g(\hat{\theta}; b) d\hat{\theta} = G(\hat{\theta}_{obs}; b).$$

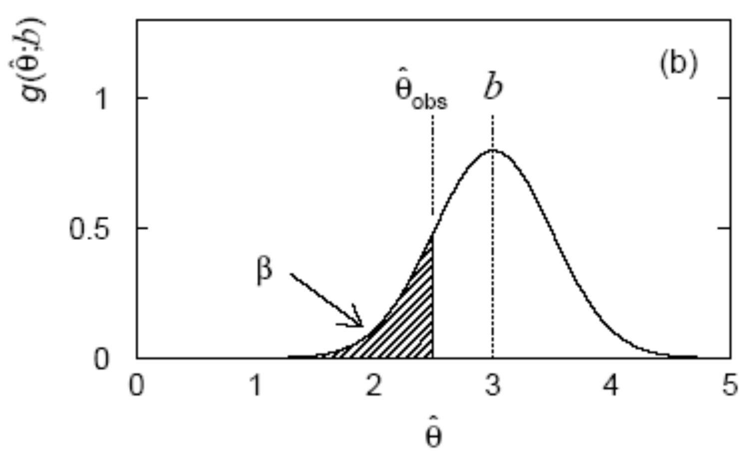
Konfidenzintervalle in der Praxis

Das Rezept das Intervall [*a*, *b*] zu finden, reduziert sich darauf zu lösen

$$\alpha = \int_{u_\alpha(\theta)}^{\infty} g(\hat{\theta};\theta)\,d\hat{\theta} = \int_{\hat{\theta}_{\text{obs}}}^{\infty} g(\hat{\theta};a)\,d\hat{\theta}\,,$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{v_\beta(\theta)} g(\hat{\theta};\theta)\,d\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{\text{obs}}} g(\hat{\theta};b)\,d\hat{\theta}\,.$$





→ *a* ist hypothetischer Wert von θ so dass $P(\hat{\theta} > \hat{\theta}_{\text{obs}}) = \alpha\,.$

→ *b* ist hypothetischer Wert von θ so dass $P(\hat{\theta} < \hat{\theta}_{\text{obs}}) = \beta\,.$

Beispiel Schätzer für Exponential-WDF

WDF für den ML-Schätzer = arithmetischer Mittelwert der Lebensdauern

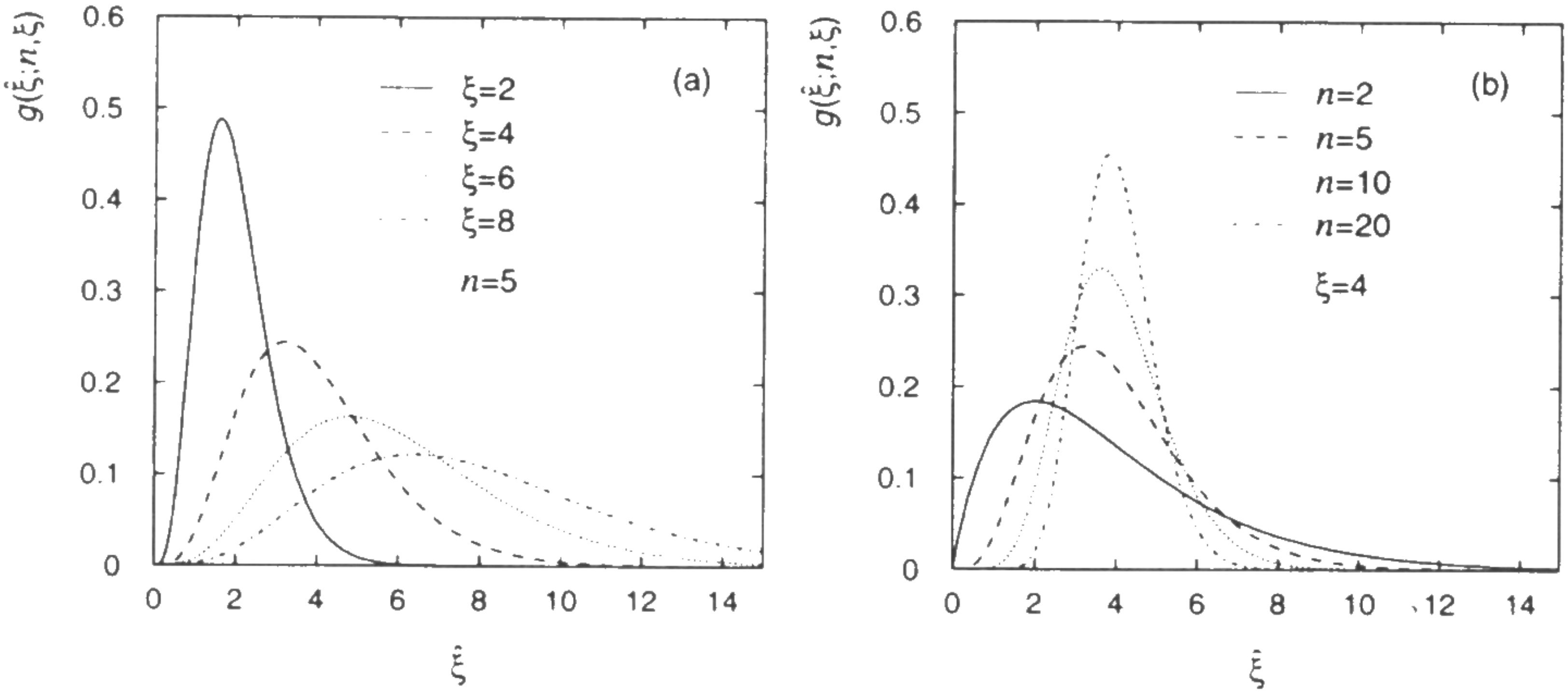
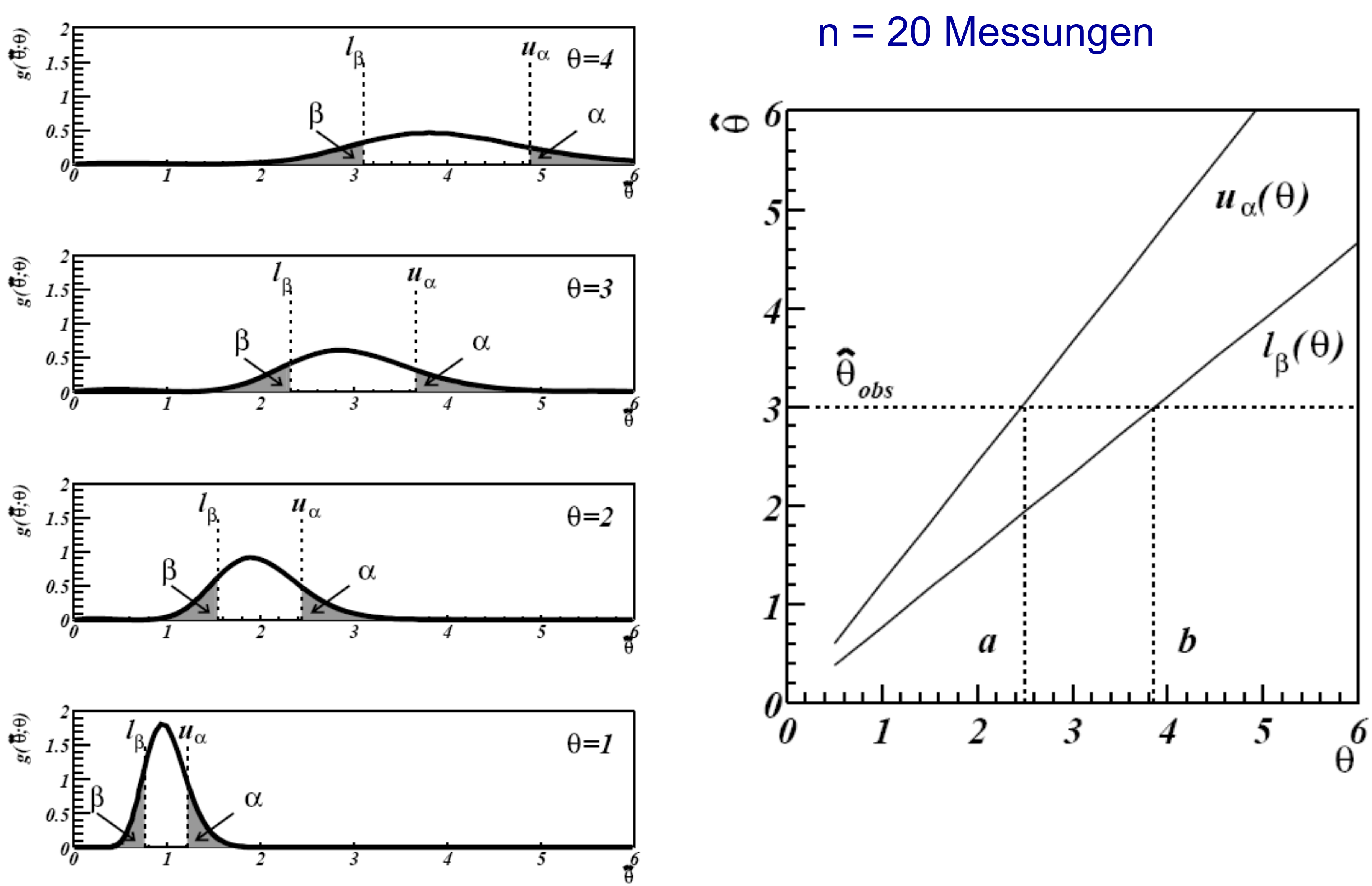


Fig. 10.1 The sampling p.d.f. $g(\hat{\xi}; n, \xi)$ for the estimator $\hat{\xi}$ for various values of n and ξ. (a) $n = 5$ measurements and various values of the true parameter ξ. (b) $\xi = 4$ and various numbers of measurements n.

n = 20 Messungen



Beispiel Schätzer fürExponential-WDF

Vergleich von KI aus beobachteten Schätzwert ± 1 Standardabweichung und korrekter Berechnung aus Konfidenzgürtel

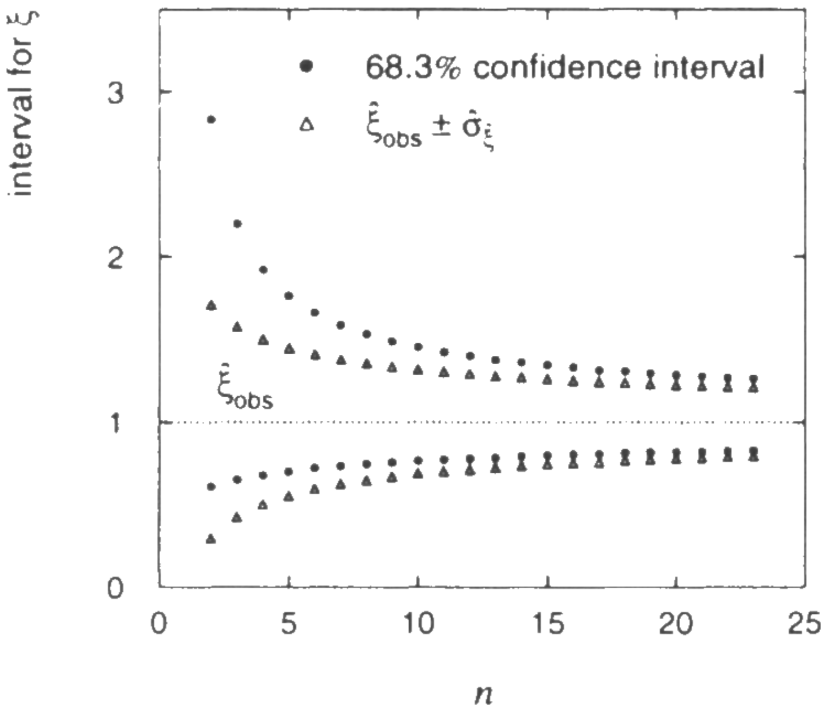


Fig. 10.2 Classical confidence intervals for the parameter of the exponential distribution ξ (between solid points) and the interval $[\hat{\xi}_{obs} - \hat{\sigma}_{\hat{\xi}}, \hat{\xi}_{obs} + \hat{\sigma}_{\hat{\xi}}]$ (between open triangles) for different values of the number of measurements n, assuming an observed value $\hat{\xi}_{obs} = 1$.

asymptotisch identisch, da WDF für Schätzer gegen Gauss-WDF
für kleine Stichproben: korrekte KI asymmetrisch u. größer
KI aus ± 1 Standardabweichung zu kleine Abdeckungswahrscheinlichkeit

Zentrale und einseitige Konfidenzintervalle

Manchmal wird nur α oder β angegeben → einseitiges Intervall
(Ausschlussgrenze oder Limit genannt)

Freiheit: wie γ auf α und β in den rechten u. linken Ausläufern verteilen?

Meistens wird $\alpha=\beta=\gamma/2$ genommen → Abdeckungswkt. $1-\gamma$
→ zentrales Konfidenzintervall

aber zentrales Intervall bedeutet nicht, dass es symmetrisch um Schätzwert ist, i.e. $b-\theta \neq \theta - a$

Es gibt auch: symmetrische KI: $b - \theta = \theta - a$
kürzeste KI: minimale Länge von $[a,b]$

Meist Konvention: $CL = 1-\gamma = 68{,}3\%$

KI für Gaussverteilte Schätzer

$$g(\hat{\theta};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\theta}}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right)$$

oft im Grenzfall erfüllt

(großen Stichprobenumfang, zentraler Grenzwertsatz)

Annahme: Varianz bekannt und unabhängig von Parameter

Ergebnis für CL=68.3%: $\theta = \hat{\theta}_{obs} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$

Formale Berechnung:

Kumulativfunktion der WDF für den Schätzer:: $G(\hat{\theta};\theta,\sigma_{\hat{\theta}}) = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\theta}}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{\theta}'-\theta)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right) d\hat{\theta}' = \Phi\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)$

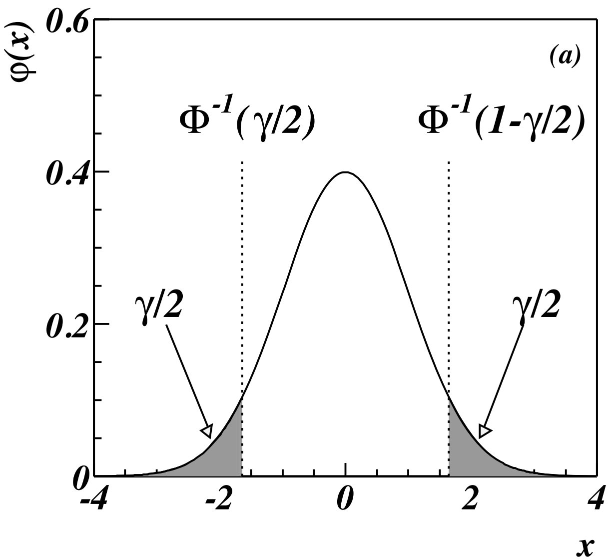
Bestimmungsgleichungen für a und b:

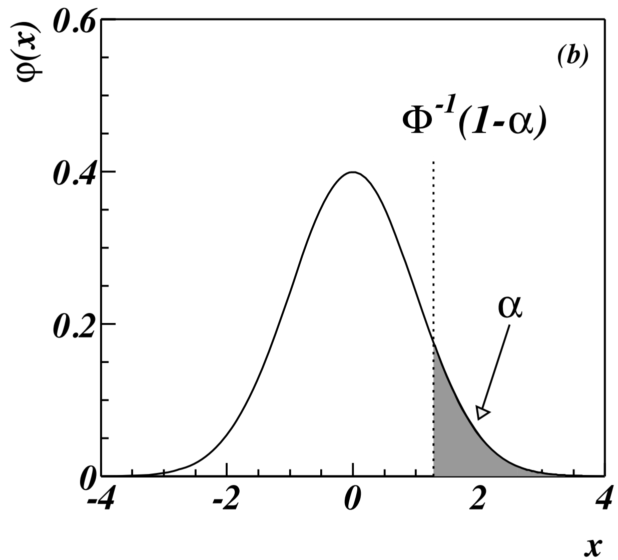
$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - G(\hat{\theta}_{obs}; a, \sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{obs}-a}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right) \\ \beta &= G(\hat{\theta}_{obs}; b, \sigma_{\hat{\theta}}) = \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{obs}-b}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right), \end{aligned}$$

und deren Lösung für a und b:

$$\begin{aligned} a &= \hat{\theta}_{obs} - \sigma_{\hat{\theta}}\Phi^{-1}(1-\alpha) \\ b &= \hat{\theta}_{obs} + \sigma_{\hat{\theta}}\Phi^{-1}(1-\beta). \end{aligned}$$

KI für Gaussverteilte Schätzer





Konfidenzniveaus für Intervalle			
zentrale		einseitige	
$\Phi^{-1}(1-\gamma/2)$	$1-\gamma$	$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	$1-\alpha$
1	0.6827	1	0.8413
2	0.9544	2	0.9772
3	0.9973	3	0.9987
4	$1-6.3\times10^{-5}$		
5	$1-5.7\times10^{-7}$		
6	$1-2.0\times10^{-9}$		

Quantile für Intervalle			
zentrale		einseitige	
$1-\gamma$	$\Phi^{-1}(1-\gamma/2)$	$1-\alpha$	$\Phi^{-1}(1-\alpha)$
0.90	1.645	0.90	1.282
0.95	1.960	0.95	1.645
0.99	2.576	0.99	2.326
0.999	3.29		
0.9999	3.89		