

Statistische Methoden der Datenanalyse

Wintersemester 2012/2013

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Prof. Markus Schumacher, Dr. Stan Lai

Physikalisches Institut Westbau 2 OG

E-Mail: Markus.Schumacher@physik.uni-freiburg.de

stan.lai@cern.ch

http://terascale.physik.uni-freiburg.de/lehre/ws_1213/statmethoden_ws1213

Kapitel 3

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (Fortsetzung)

Binomial-Verteilung

Betrachte N unabhängige Messungen/Experimente (Bernoulli-Versuche):

Ausgang jedes Experimentes ist entweder "Erfolg" oder "Misserfolg"

Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg (Misserfolg) sind p bzw. $(1-p)$

Definiere diskrete ZV als Anzahl der Erfolge n ($0 \leq n \leq N$).

Wkt. für eine spezielle Reihenfolge von n Erfolgen und $(N-n)$ Misserfolgen ist:

$$p p (1 - p) p (1 - p) = p^n (1 - p)^{N-n}$$

Aber Anordnung ist unwichtig \rightarrow Kombinatorik: es gibt $\frac{N!}{n!(N-n)!}$

Möglichkeiten (Permutationen) n Erfolge in N Versuchen einzuordnen.

Geamtwkt. für n Erfolge ist die Summe der Wkt. für jede Permutation.

Binomial-Verteilung (2)

Die Binomialverteilung lautet:

$$f(n; N, p) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Zufalls-
variable

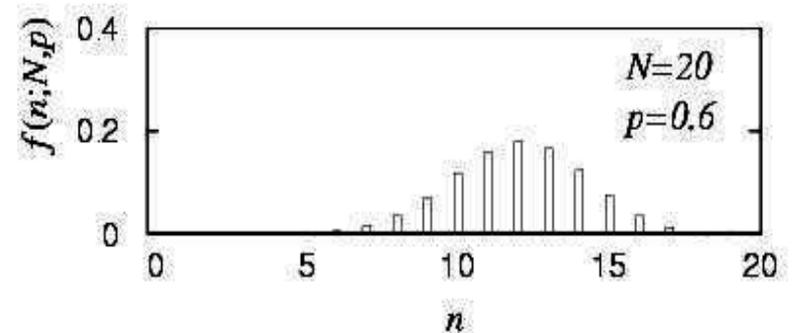
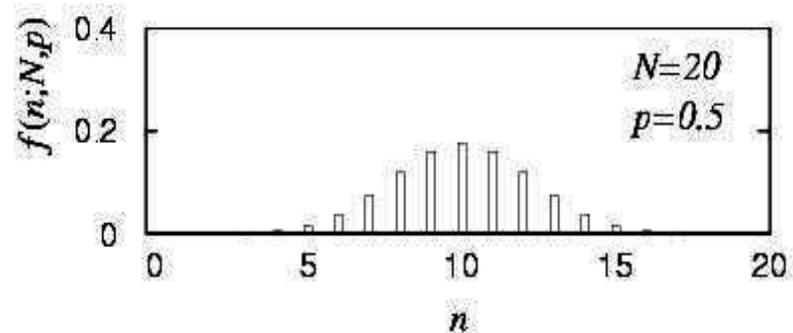
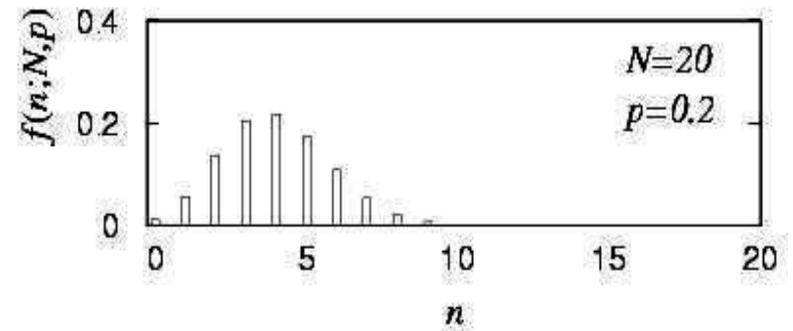
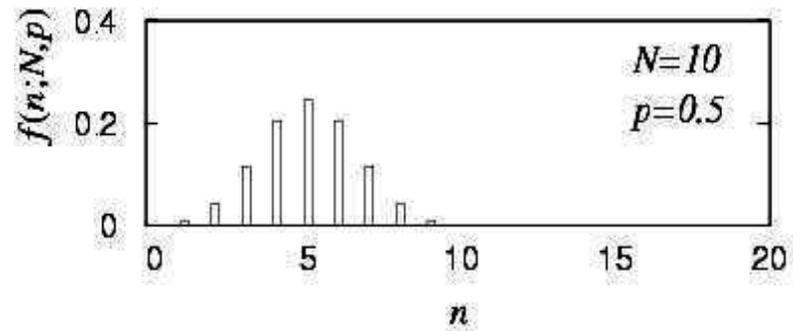
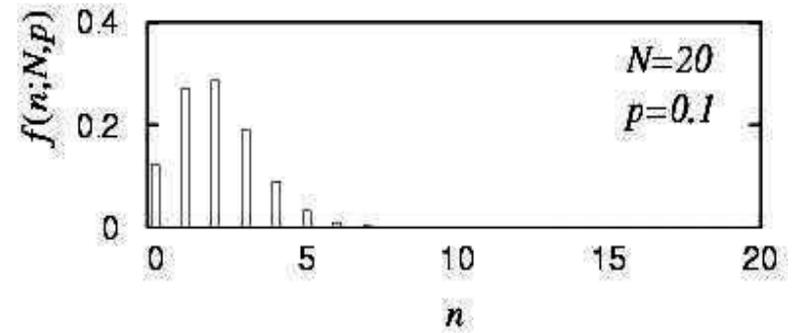
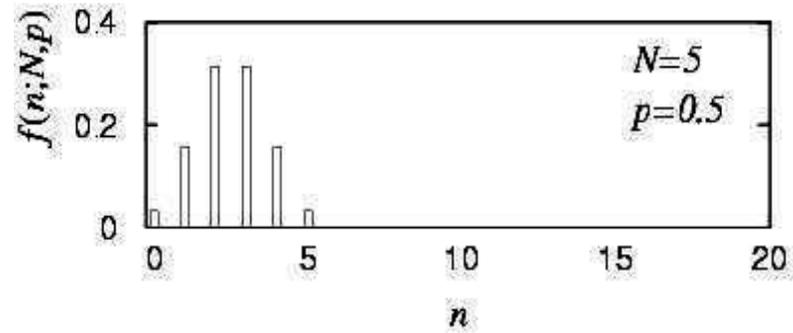
Parameter

Für den Erwartungswert und die Varianz findet man:

$$E[n] = \sum_{n=0}^N n f(n; N, p) = Np \quad V[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = Np(1-p)$$

Binomial-Verteilung (3)

Verteilungen für verschiedene Parameter p und Anzahl der Versuche N :



Multinomialverteilung

Wie Binomial aber nun m verschiedene Ausgänge an Stelle von zwei, mit Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ausgänge:

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_m), \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1 .$$

Für N Versuche suchen wir die Wahrscheinlichkeit das folgende Ergebnis zu erhalten:

n_1 von Möglichkeit 1,

n_2 von Möglichkeit 2,

...

n_m von Möglichkeit m .

Die Wkt.dichtefunktion ist die Multinomialverteilung für $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$

$$f(\vec{n}; N, \vec{p}) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Multinomialverteilung (2)

Nun betrachte Möglichkeit i as ‘Erfolg’, alle anderen als “Misserfolg”.

→ alle individuellen n_i binomialverteilt mit Parametern N, p_i

$$E[n_i] = Np_i, \quad V[n_i] = Np_i(1 - p_i) \quad \text{für alle } i$$

Für die Kovarianzen (i ungleich j) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{cov}[n_i, n_j] &= E[(n_i - E[n_i])(n_j - E[n_j])] \\ &= E[n_i n_j] - E[n_i]E[n_j] \\ &= N(N - 1)p_i p_j - (Np_i)(Np_j) \\ &= -Np_i p_j. \end{aligned}$$

Negative Korrelation:
wenn in einer Klasse mehr
Ereignisse sind, müssen
irgendwo welche fehlen

$$\rho_{n_i n_j} = \frac{\text{cov}[n_i, n_j]}{\sigma_{n_i} \sigma_{n_j}} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}}.$$

Multinomialverteilung (3): Beispiele

$\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$ repräsentiert ein Histogramm

Mit m bins, N (bekannt) Gesamteinträgen

Zerfall eines instabilen Teilchens A: (1) $A \rightarrow BC$, (2) $A \rightarrow DE$, (3) $A \rightarrow FG$

Mit bekannten Zerfallswahrscheinlichkeiten für alle drei Modi.

(n_{BC}, n_{DE}, n_{FG}) folgt Multinomialverteilung.

Textanalyse: Auftreten der einzelnen Buchstaben des Alphabets.

(n_A, \dots, n_Z) folgt Multinomialverteilung.

Poissonverteilung

Betrachte Grenzfall der Binomialverteilung mit

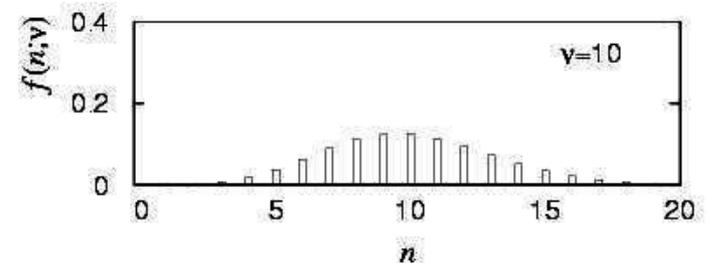
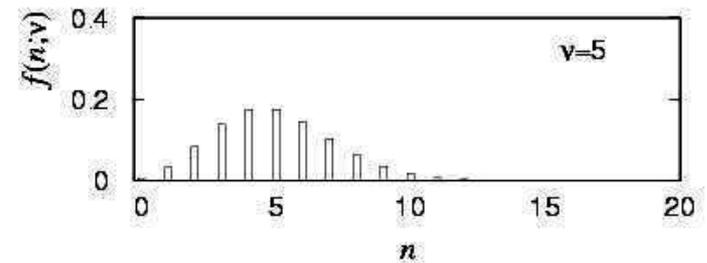
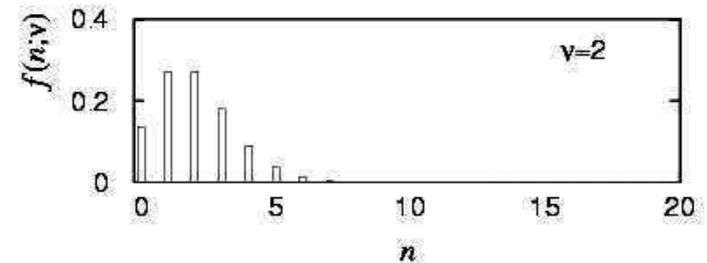
$$N \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad E[n] = Np \rightarrow \nu \text{ .konstant}$$

→ n folgt der Poissonverteilung:

$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \quad (n \geq 0)$$

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda,$$

$$V[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \lambda)^2 \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda.$$



Poissonverteilung

Betrachte Grenzfall der Binomialverteilung mit

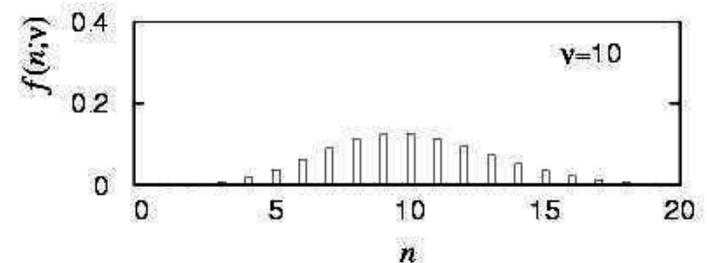
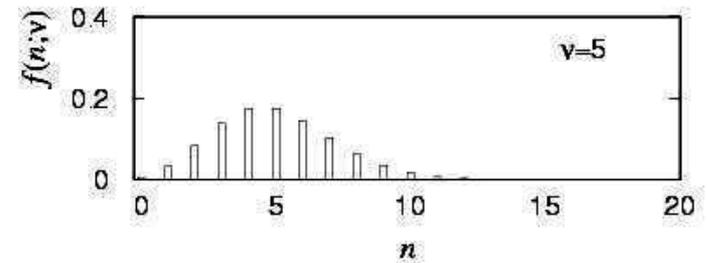
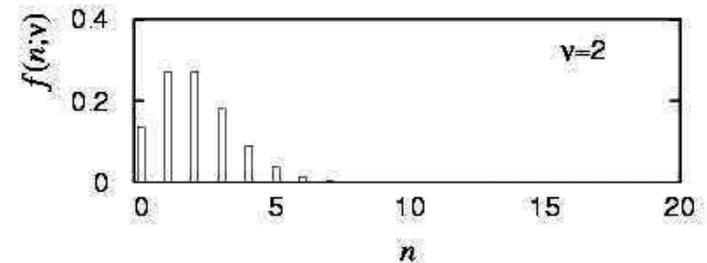
$$N \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad E[n] = Np \rightarrow \nu \text{ .konstant}$$

→ n folgt der Poissonverteilung:

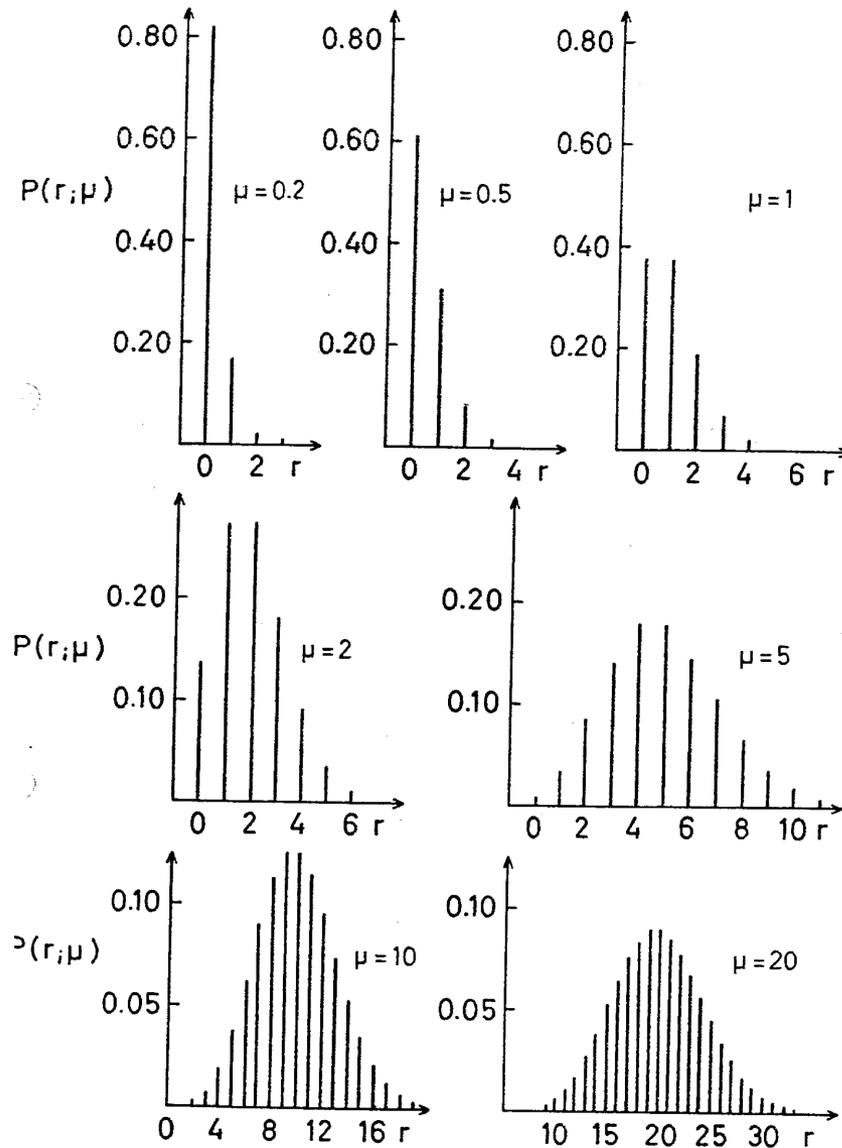
$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \quad (n \geq 0)$$

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda,$$

$$V[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \lambda)^2 \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \lambda.$$



Poissonverteilung (2)



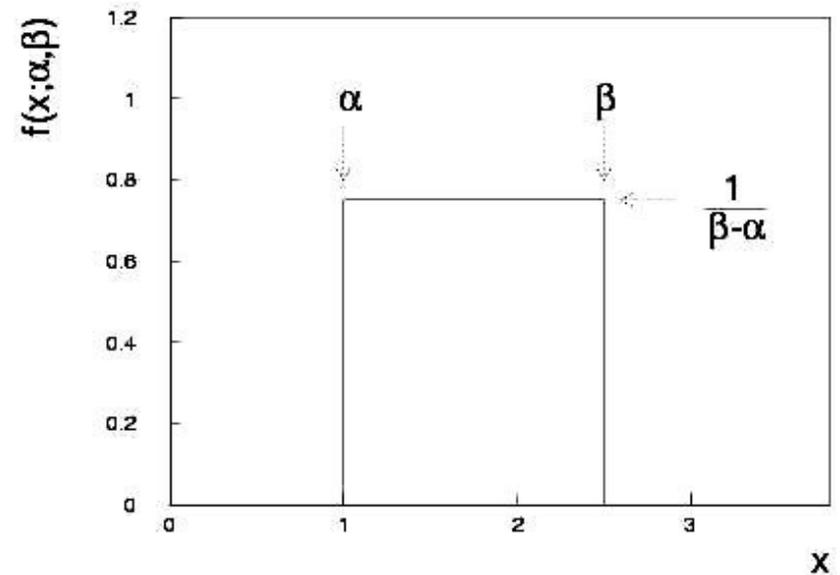
Gleichverteilung

Betrachte kontinuierliche ZV x mit $-\infty < x < \infty$. Die Gleichverteilung lautet:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$



Bemerkung: für beliebige ZV x mit Kumulativverteilung $F(x)$ gilt, dass die ZV $y = F(x)$ gleichverteilt in $[0,1]$ ist.

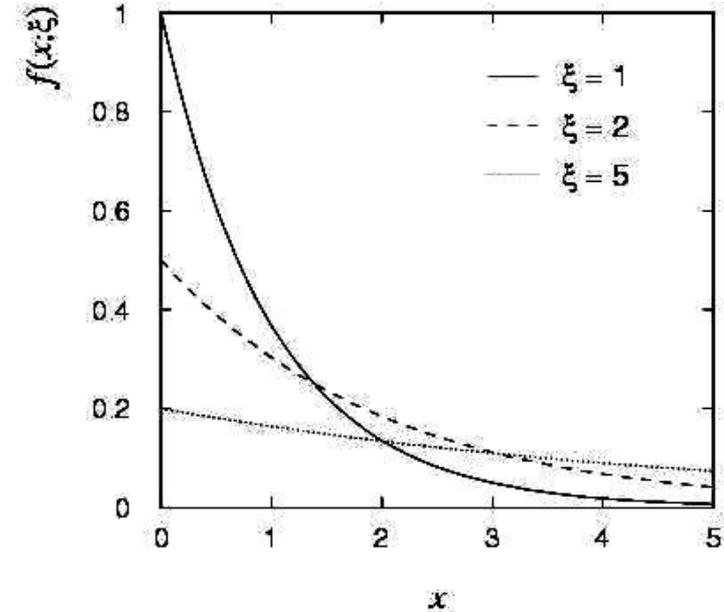
Exponentialverteilung

Die Exponential-WDF für kontinuierliche ZV x ist definiert als:

$$f(x; \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \xi$$

$$V[x] = \xi^2$$



Beispiel: Zerfallszeit eines instabilen Teilchens

$$f(t; \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (\tau = \text{mittlere Lebensdauer})$$

Kein Gedächtnis (einzigartig für Exp-WDF) $f(t - t_0 | t \geq t_0) = f(t)$

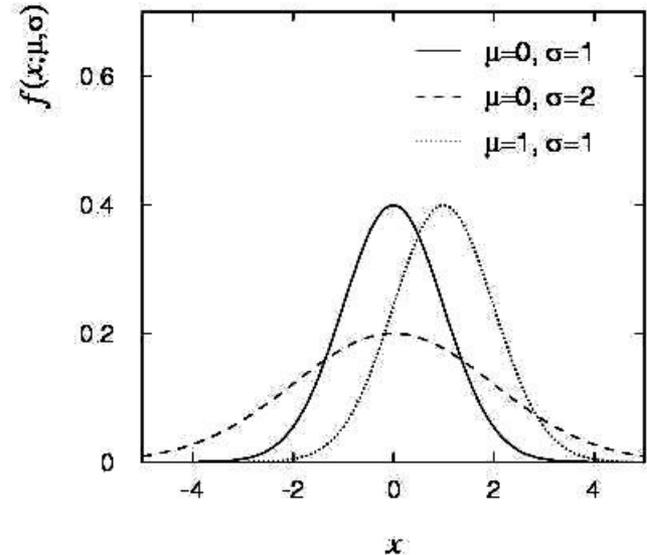
Gauss- oder Normalverteilung

Dies Gauss- oder Normal-WDF für eine kontinuierliche ZV x ist definiert als:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E[x] = \mu$$

$$V[x] = \sigma^2$$



Spezialfall: $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ('Standard-Gauss'):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x') dx'$$

Wenn y aus Gauss-WDF mit μ, σ^2 , dann folgt $x = (y - \mu) / \sigma$ der $\varphi(x)$.

Gaussverteilung(2) : Kumulativverteilung

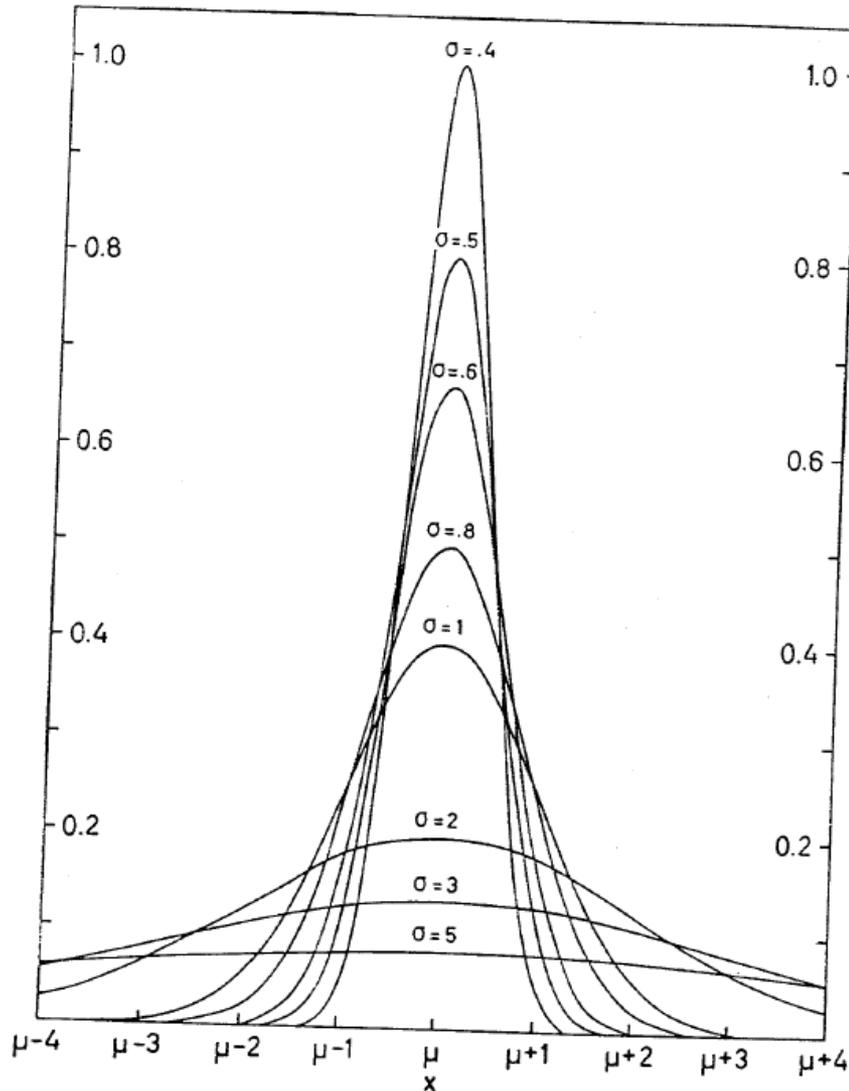


Fig. 4.6. The normal p.d.f. $N(\mu, \sigma^2)$ for different values of the standard deviation σ .

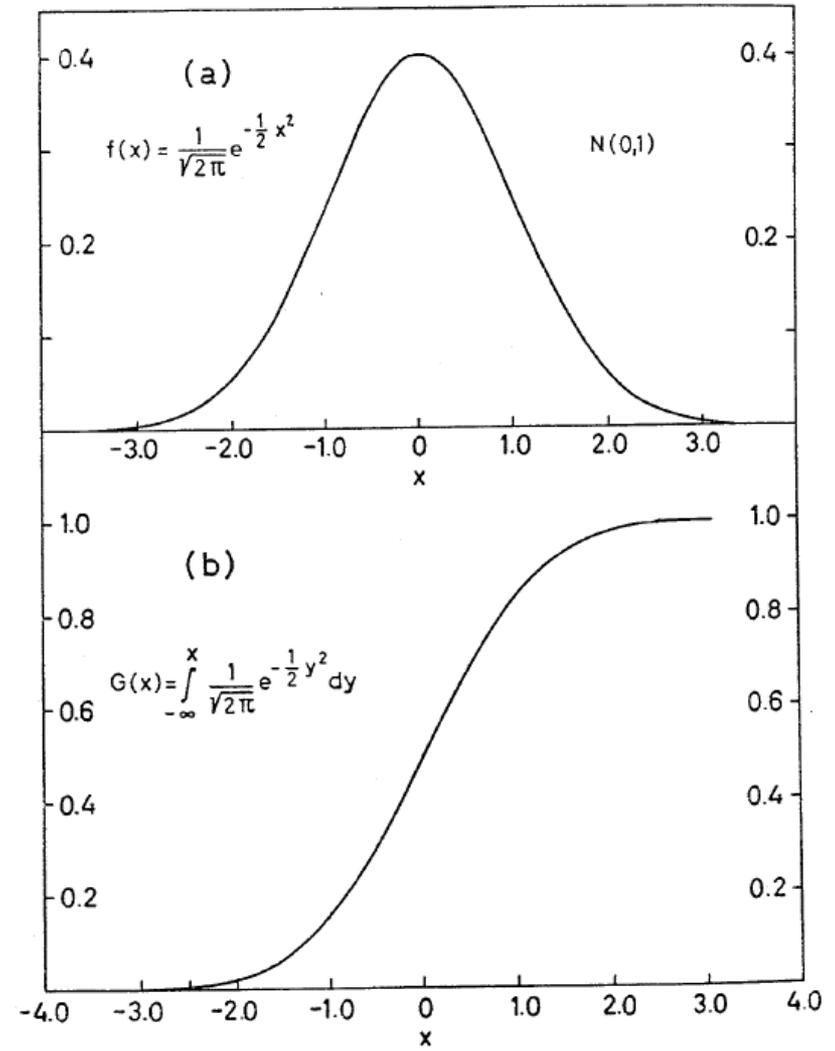
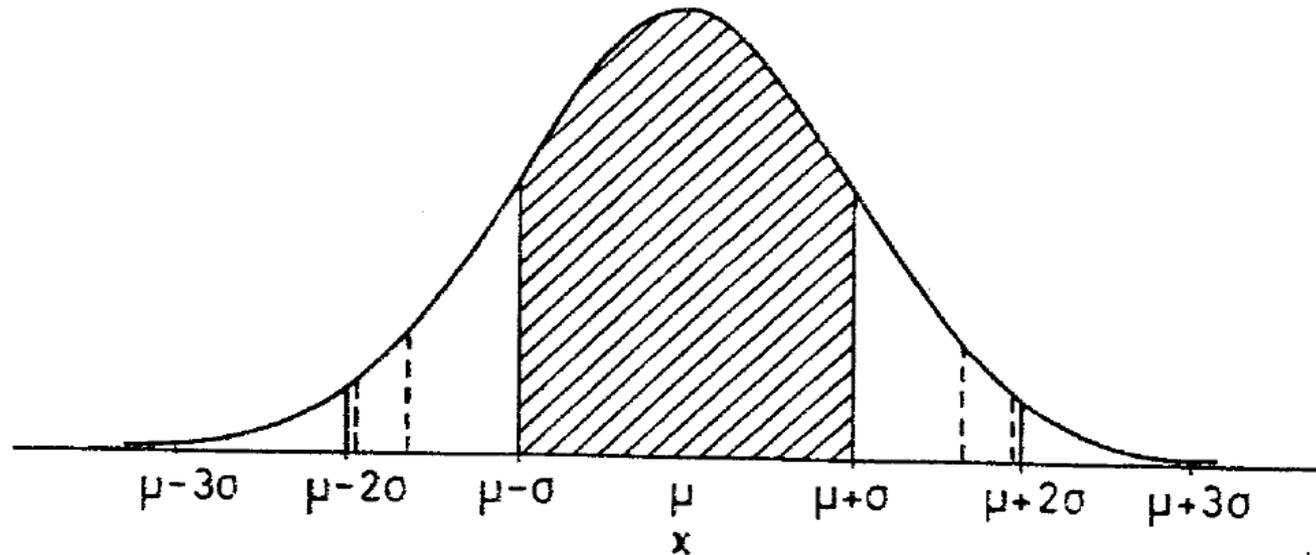


Fig. 4.7. (a) The standard normal p.d.f. $N(0,1)$.
(b) The cumulative standard normal distribution.

Gauss- oder Normalverteilung (3)



$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 2G(1) - 1 = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 2G(2) - 1 = 0.9549$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 2G(3) - 1 = 0.9973.$$

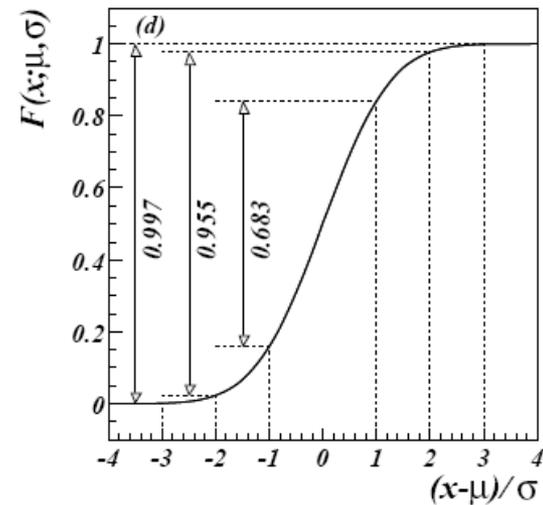
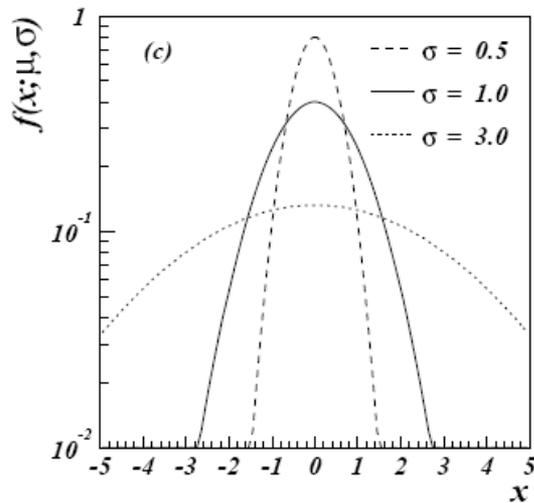
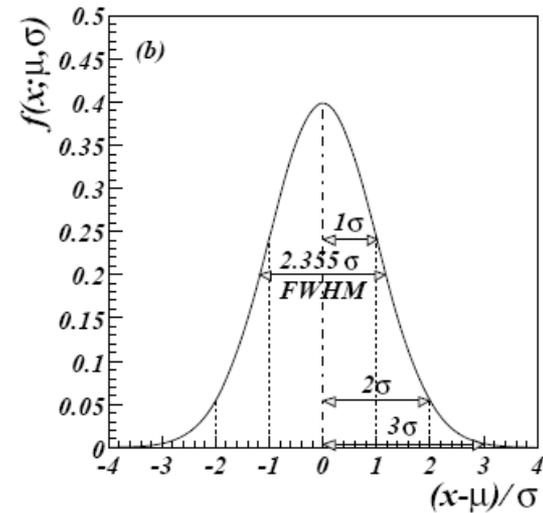
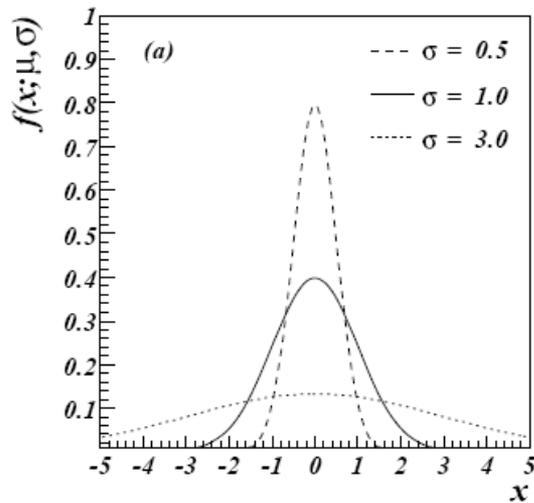
$$P(\mu - 1.645\sigma \leq x \leq \mu + 1.645\sigma) = 0.90$$

$$P(\mu - 1.960\sigma \leq x \leq \mu + 1.960\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 2.576\sigma \leq x \leq \mu + 2.576\sigma) = 0.99$$

$$P(\mu - 3.290\sigma \leq x \leq \mu + 3.290\sigma) = 0.999$$

Gauss- oder Normalverteilung (4)



Gauss-WDF und Zentraler Grenzwertsatz

Die Gaussverteilung ist von so großer Bedeutung weil jede ZV, welche die Summe aus einer großen Anzahl kleiner Zahlenbeiträge ist, gemäß ihr verteilt ist. Die folgt aus dem “Zentralen Grenzwertsatz”:

Gegeben n unabhängige ZV x_i mit endlicher Varianzen σ_i^2 , aber ansonsten beliebigen WDFs. Betrachte die ZV y als Summe

$$y = \sum_{i=1}^n x_i$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gilt, dass y einer Gaussverteilung folgt mit

$$E[y] = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad V[y] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Messfehler sind oft die Summe aus vielen kleinen Beiträgen. Daher können Werte häufig als gaussverteilt angenommen werden.

Der ZGS kann unter Verwendung der charakteristischen Funktionen bewiesen werden (siehe z.B. Cowan Kapitel 10).

Zentraler Grenzwertsatz (ZGS) (2)

Für endliche n , gilt der ZGS in “guter” Näherung wenn die Fluktuationen der Summe der ZV nicht durch einen (oder wenige) Beiträge dominiert wird.



Vorsicht vor Messungen mit nicht-Gausschen Fehlern

Gutes Beispiel: Geschwindigkeitskomponente v_x von Luftmolekülen

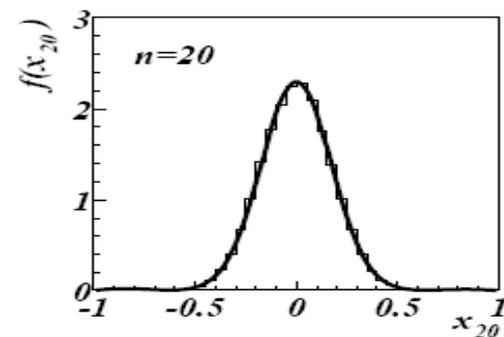
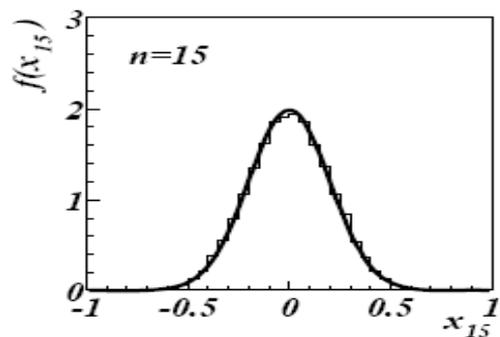
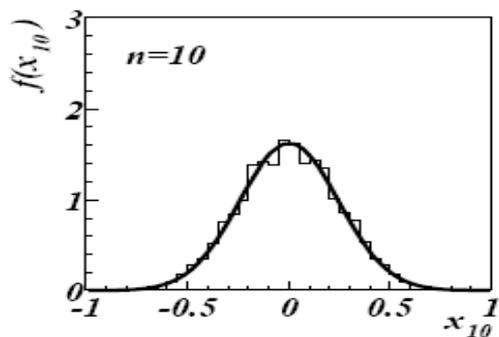
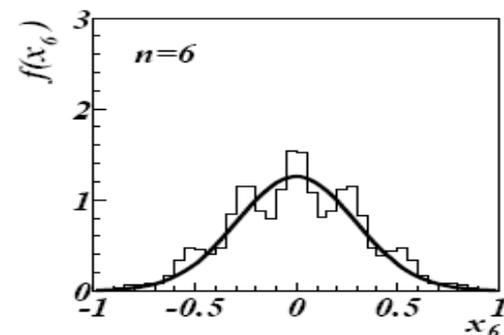
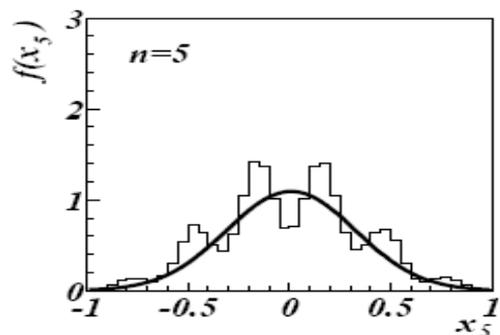
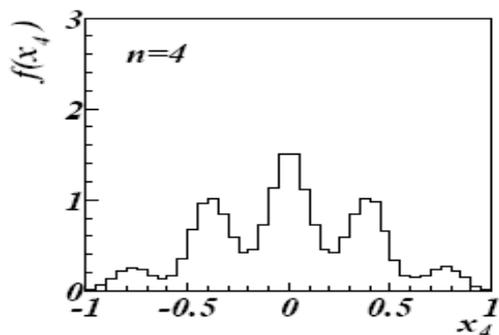
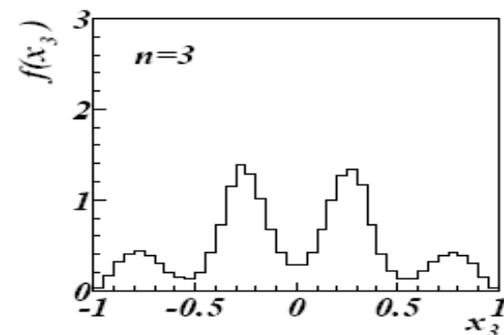
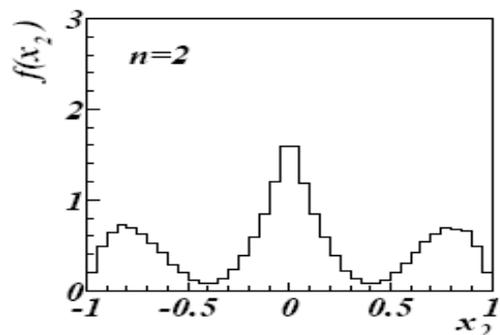
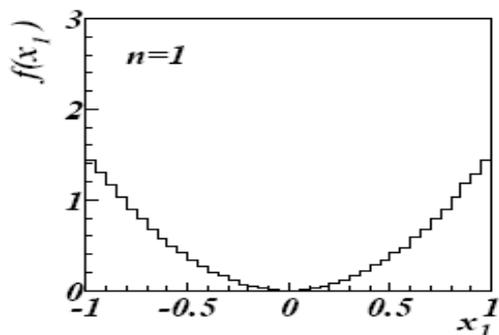
“OK”-Beispiel: totale Ablenkung durch Coulomb-Vielfachstreuung
(Seltene Ablenkungen unter große Winkeln ergeben nicht-gaussische Ausläufer)

Schlechtes Beispiel: Energieverlust von geladenem Teilchen in dünner Gasschicht. (Seltene Kollisionen tragen Großteil des Energieverlustes → Landau-WDF).

Gutes Beispiel: Größe des Menschen. Viele Faktoren beeinflussen Größe.

Schlechtes Beispiel: Gewicht des Menschen. Dominiert durch Essverhalten.

Zentraler Grenzwertsatz bei der Arbeit



Mehrdimensionale Gaussverteilung

Mehrdimensionale Gauss-WDF für Vektor von ZV $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$f(\vec{x}; \vec{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |V|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T V^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right]$$

\vec{x} , $\vec{\mu}$ sind Spaltenvektoren \vec{x}^T , $\vec{\mu}^T$ sind transponierte (Zeilen-)Vektoren

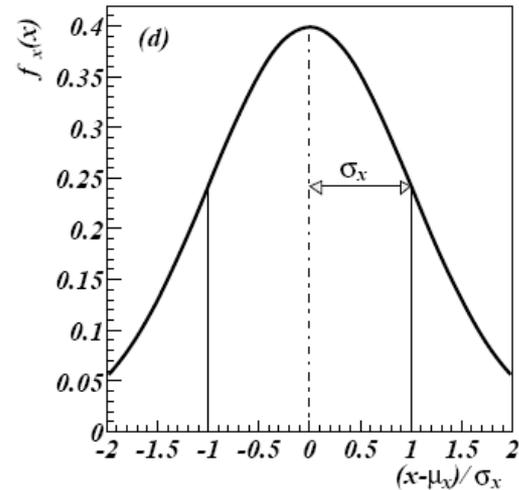
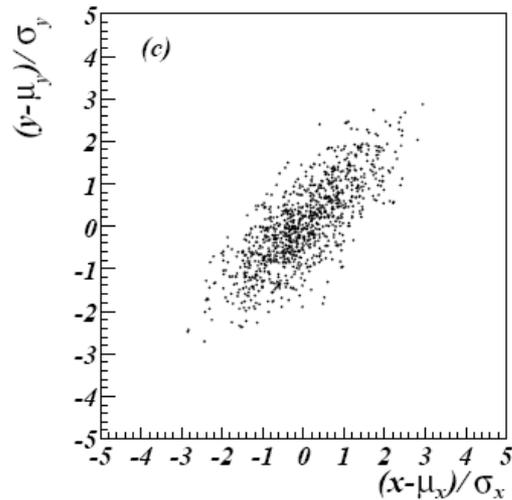
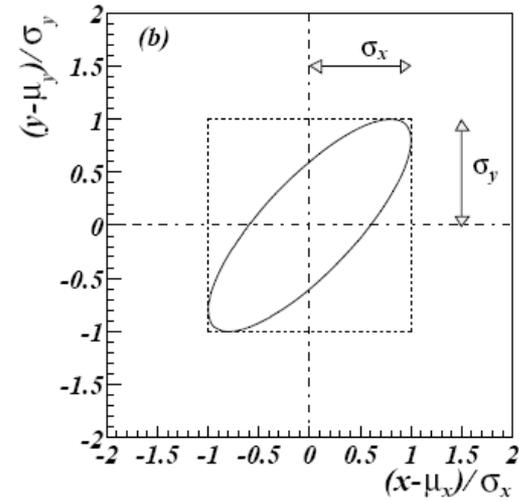
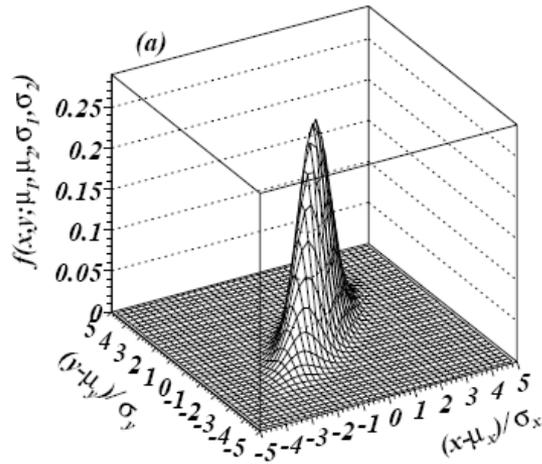
$$E[x_i] = \mu_i, \quad \text{COV}[x_i, x_j] = V_{ij} .$$

Für $n = 2$ ist die WDF gegeben durch:

$$f(x_1, x_2, ; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right] \right\}$$

wobei $\rho = \text{cov}[x_1, x_2]/(\sigma_1\sigma_2)$ der Korrelationskoeffizient ist.

Mehrdimensionale Gaussverteilung



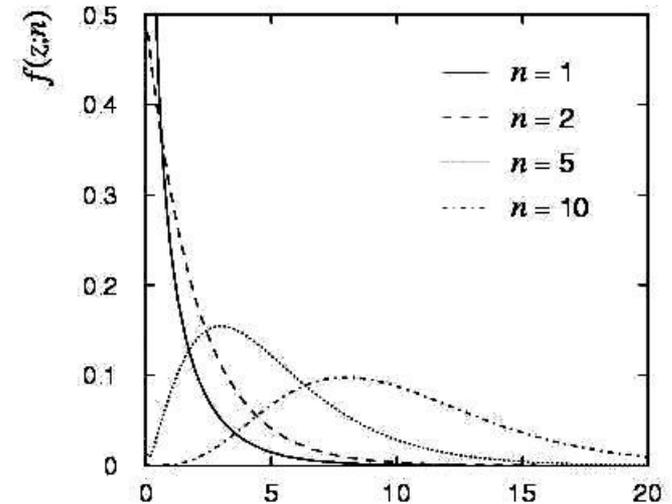
Chi-Quadrat-(χ^2)-Verteilung

Die Chi-Quadrat-WDF für kontinuierliche ZV z ($z \geq 0$) ist definiert als:

$$f(z; n) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}$$

$n = 1, 2, \dots$ = Anzahl der Freiheitsgrade "FG"

$$E[z] = n, \quad V[z] = 2n.$$



Für unabhängige Gauss-ZV x_i , $i = 1, \dots, n$, mit Mittelwerten μ_i , Varianzen σ_i^2 ,

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \text{folgt einer } \chi^2 \text{ WDF mit } n \text{ FG.}$$

Beispiel: Test der Güte der Anpassung im besonderen im Zusammenhang mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Quantile der Chi-Quadrat- (χ^2) -Verteilung

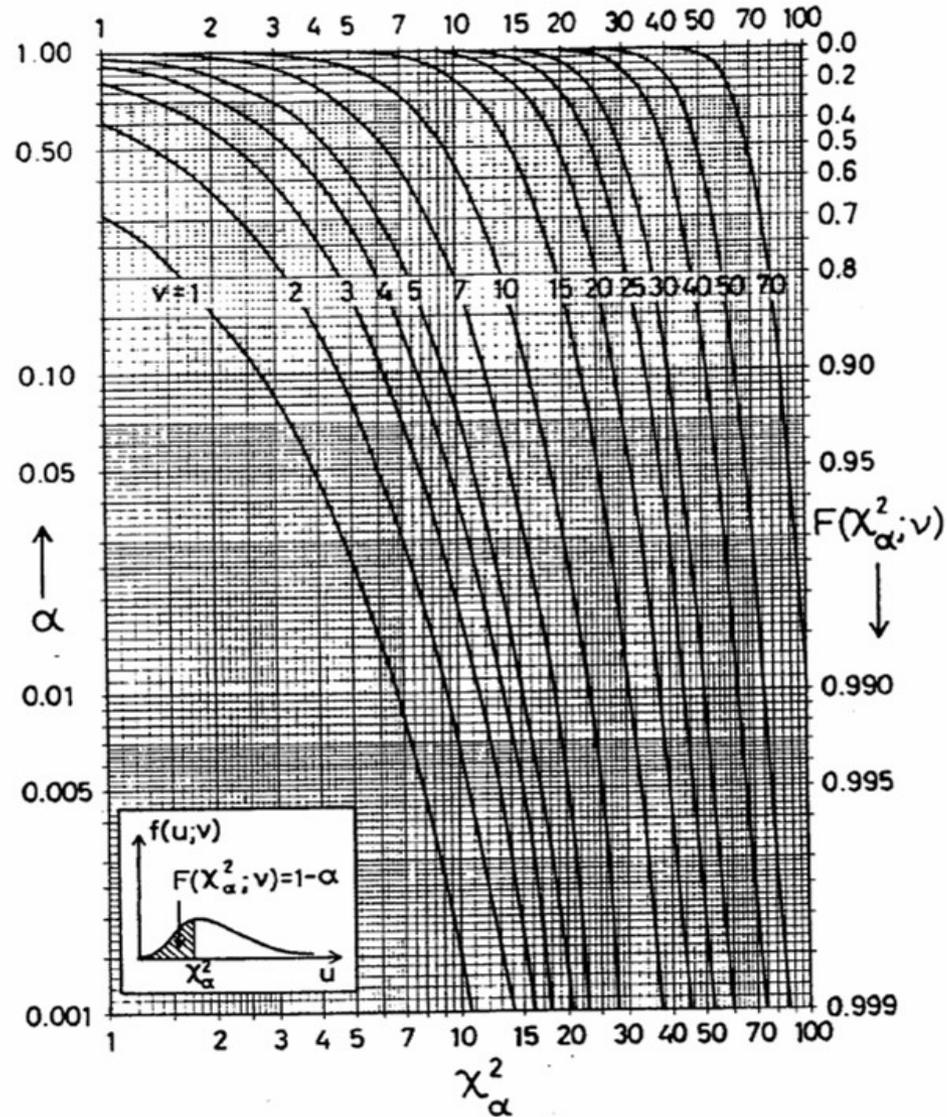
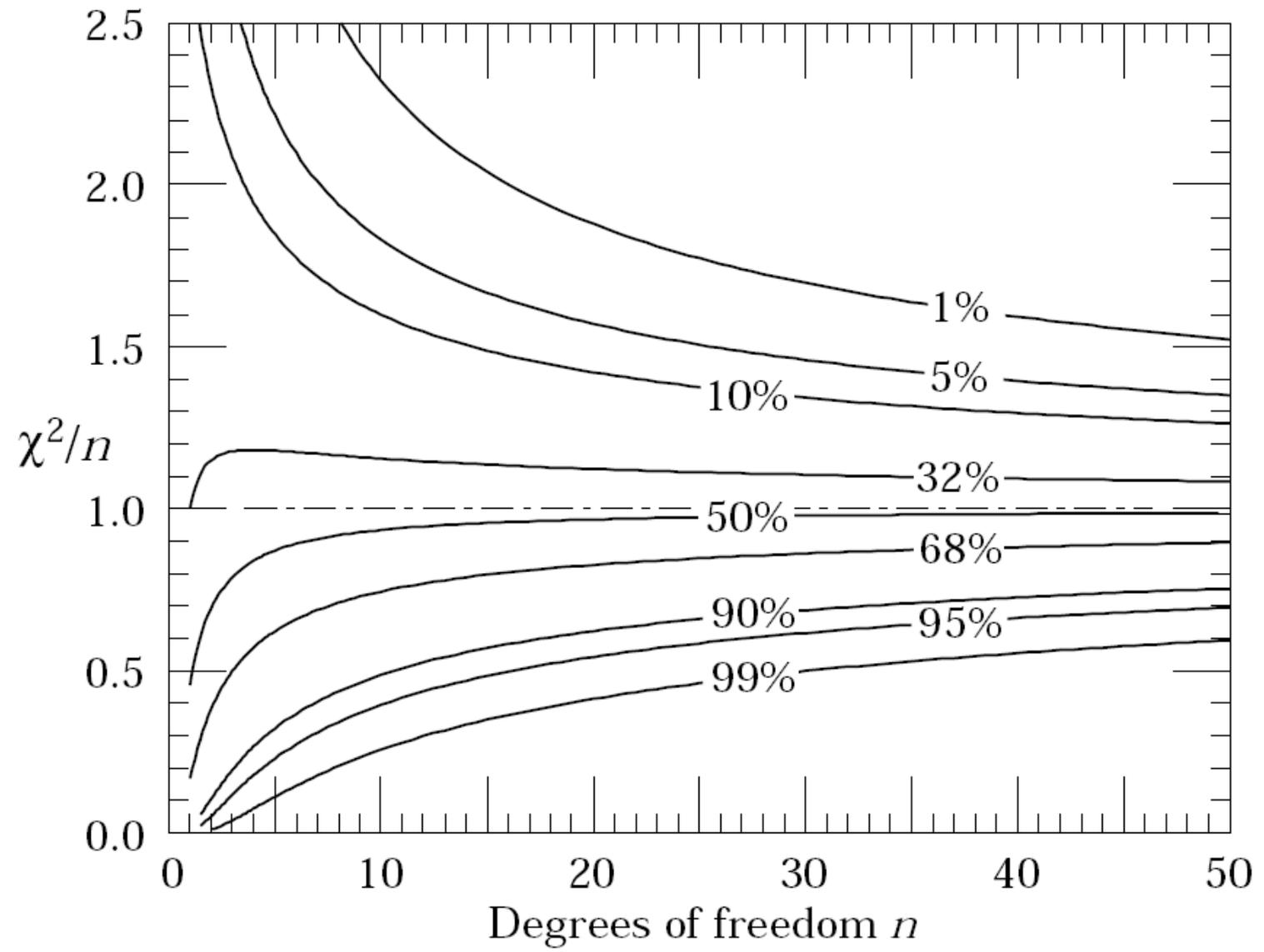


Fig. 5.2. Probability contents of the chi-square distribution.

Frodesen et al.

Quantile der Chi-Quadrat- (χ^2) -Verteilung (2)



Lutz Feld

Cauchy- und Breit-Wigner-Verteilung

Die Breit-Wigner-WDF für eine kontinuierliche ZV x ist definiert als

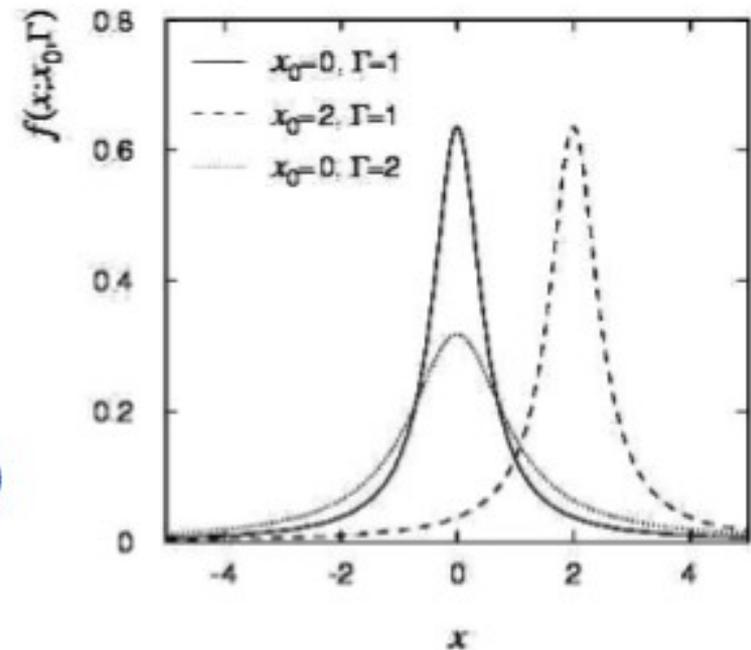
$$f(x; \Gamma, x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x - x_0)^2}$$

(Spezialfall: Cauchy-Verteilung
für $\Gamma = 2$ und $x_0 = 0$)

$E[x]$ nicht wohldefiniert, $V[x] \rightarrow \infty$.

x_0 = Modalwerte (wahrscheinlichster Wert)

Γ = volle Breite auf halber Maximalhöhe



Beispiel: Massenverteilung eines instabilen Teilchens z.B. ρ , K^* , f^0 , ...

Γ = Zerfallsbreite (Reziproke der mittleren Lebensdauer)

Cauchy / Breit Wigner Distribution

Distribution	Fraction of distribution in tail					
	$ x $	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4	≥ 6
Standard normal		.3173	.0455	.0027	.00006	-
Double exponential		.3679	.1353	.0498	.0183	.0025
Cauchy		.5000	.2952	.2048	.1560	.1051

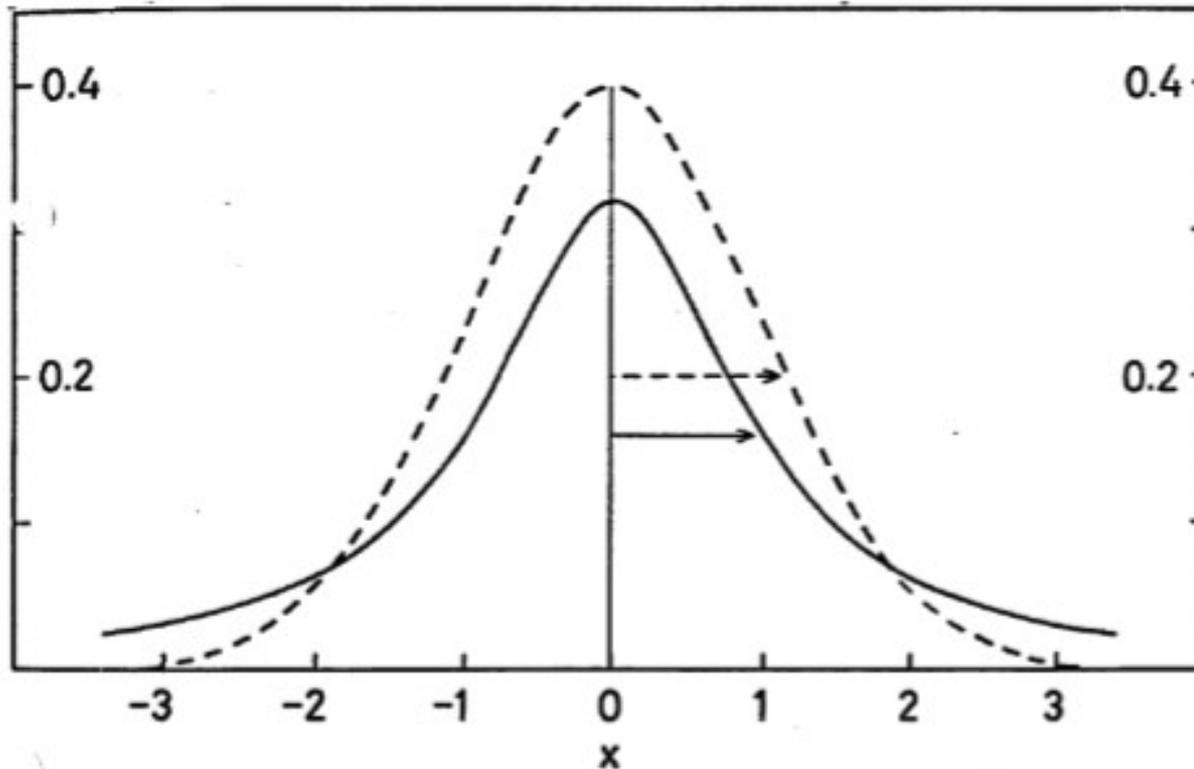


Fig. 4.9. The Cauchy or Breit-Wigner distribution (solid curve) and the standard normal distribution (dashed curve). The half-widths at half-maximum are indicated by arrows of length 1 and $\sqrt{2 \ln 2} = 1.18$, respectively.

Frodesen et al.

Landau distribution

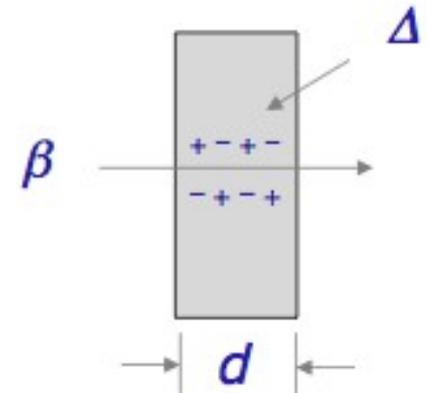
Der Energieverlust Δ eines geladenen Teilchens mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$, welches eine Materialschicht der Dicke d durchquert, folgt der Landau-Verteilung.

$$f(\Delta; \beta) = \frac{1}{\xi} \phi(\lambda) ,$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-u \ln u - \lambda u) \sin \pi u \, du ,$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi} \left[\Delta - \xi \left(\ln \frac{\xi}{\epsilon'} + 1 - \gamma_E \right) \right] ,$$

$$\xi = \frac{2\pi N_A e^4 z^2 \rho \sum Z}{m_e c^2 \sum A} \frac{d}{\beta^2} , \quad \epsilon' = \frac{I^2 \exp \beta^2}{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2} .$$



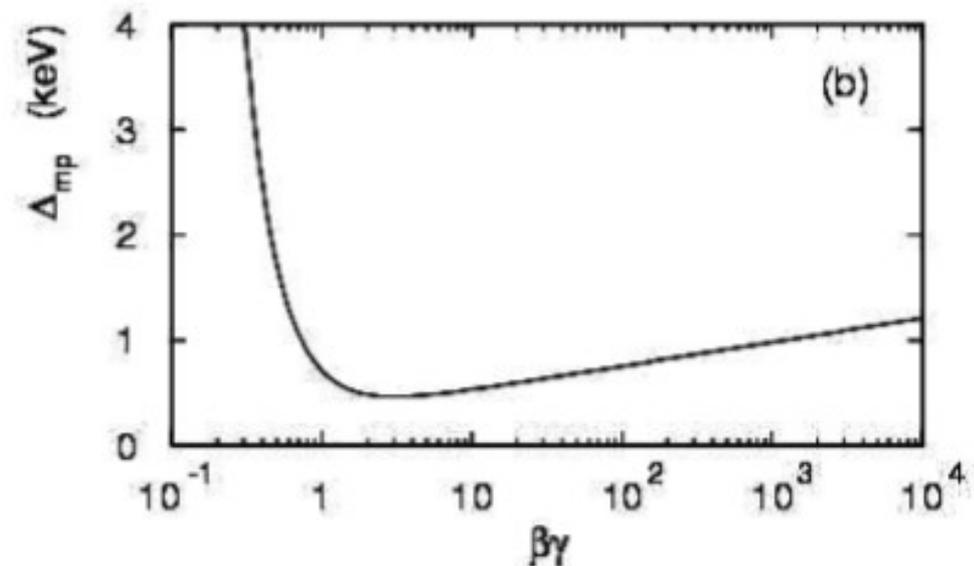
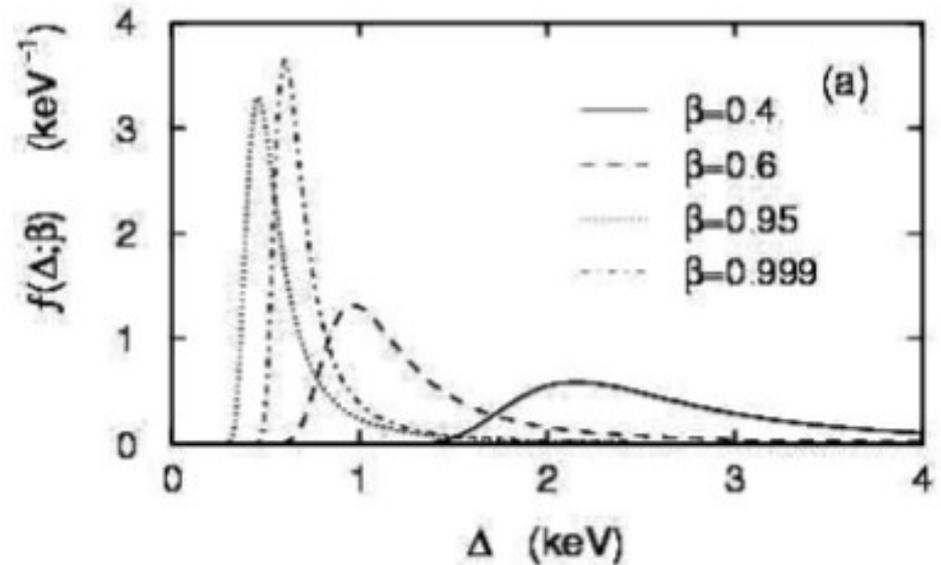
L. Landau, J. Phys. USSR **8** (1944) 201; see also

W. Allison and J. Cobb, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **30** (1980) 253.

Landau distribution (II)

Lange "Landau-Ausläufer"
→ alle Momente ∞

Modalwert sensitiv
auf Geschwindigkeit β ,
→ Teilchenidentifikation



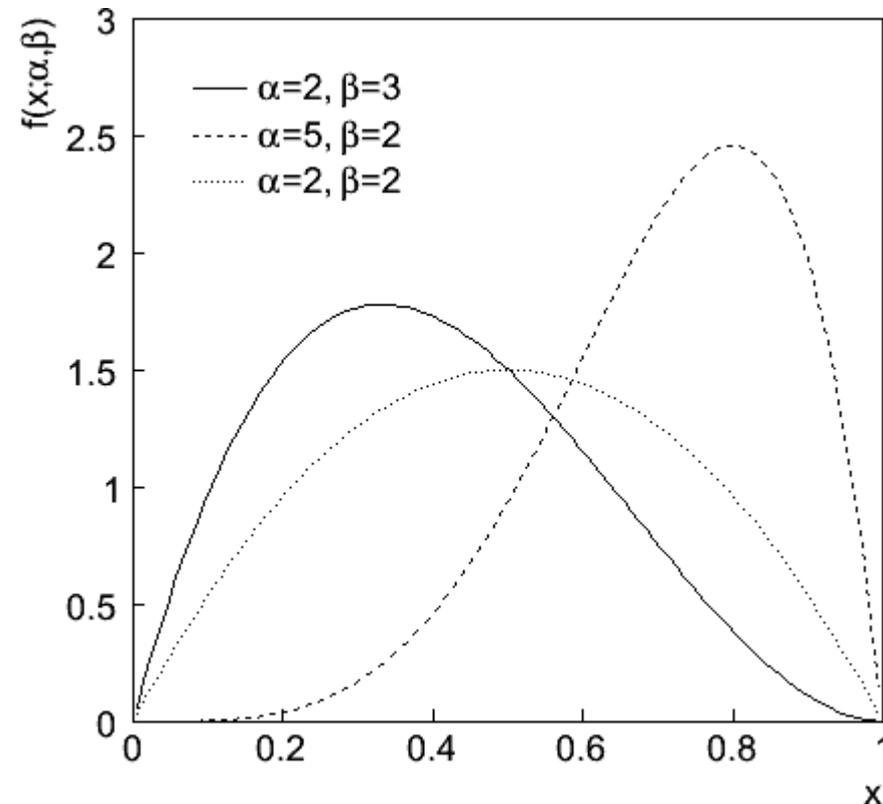
Beta-Verteilung

Die Beta-WDF für eine kontinuierliche ZV x im Intervall $[0,1]$ ist definiert als

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$E[x] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$V[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$



Wird oft verwendet um WDF zu approximieren, die eine kontinuierliche ZV in einen gewissen Bereich beschrieben $[a,b]$ beschreiben.

Beta-Verteilung: Eigenschaften

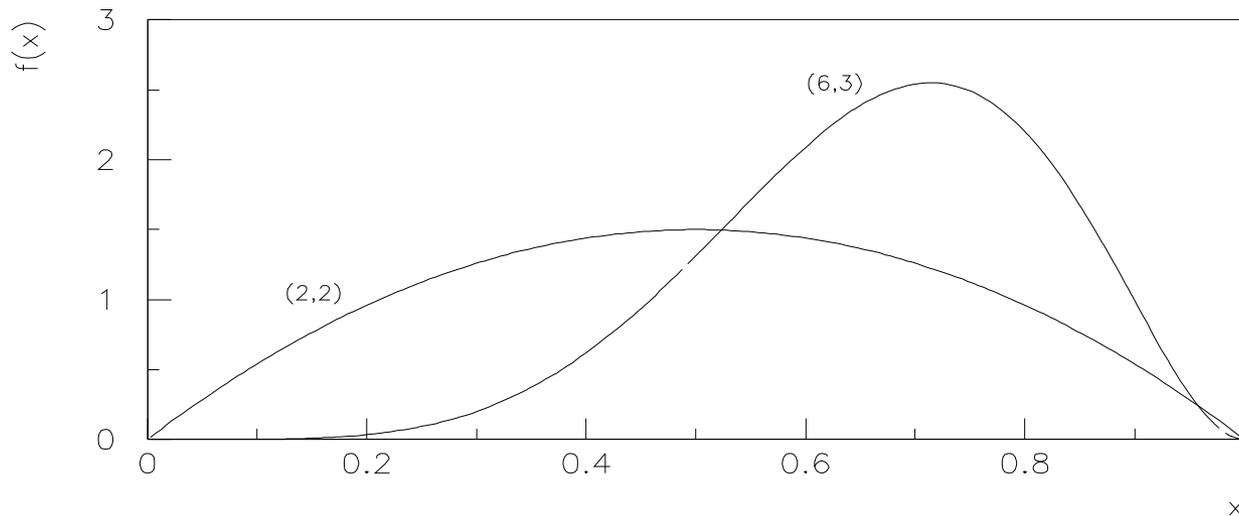
Für $a=b=1$ ergibt sich die Gleichverteilung in $[0,1]$

Für $a=1, b=2$ (oder umgekehrt) \rightarrow Dreiecksverteilung $f(x)=2-2x$ und $f(x)=2x$

Für $a=b=2 \rightarrow$ Parabelverteilung $f(x)=6x(1-x)$

Für $a,b>1$: ein Modalwert bei $x=(a-1)/(a+b-2)$

Für a und/oder $b<1$: $f(0)$ und/oder $f(1) \rightarrow$ unendlich (J-Form)



Beta-Verteilung: Herleitung

Seien y_m und y_n zwei ZV die nach Chi2-WDF mit m bzw. n Freiheitsgraden verteilt sind

Dann folgt ZV $x = y_m/(y_m + y_n)$ einer Beta-WDF mit $\alpha = m/2$ und $\beta = n/2$

$$x = y_m/(y_m + y_n) \text{ and } y = y_m + y_n \quad y_m = xy \text{ and } y_n = y(1 - x)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y_m}{\partial x} & \frac{\partial y_m}{\partial y} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \end{array} \right| f(y_m, y_n) = \\ &= \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1 - x \end{vmatrix} \left\{ \frac{\left(\frac{y_m}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y_m}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \right\} \left\{ \frac{\left(\frac{y_n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y_n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} \right\} \left\{ \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} \right\} \end{aligned}$$

Wir erkennen Produkt von Beta-WDF für x
mal Chi-Quadrat-WDF mit $n+m$ Freiheitsgraden für y

Gamma-Verteilung

Die Gamma-WDF für eine kontinuierliche ZV x im Intervall $[0, \infty]$ ist definiert als

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

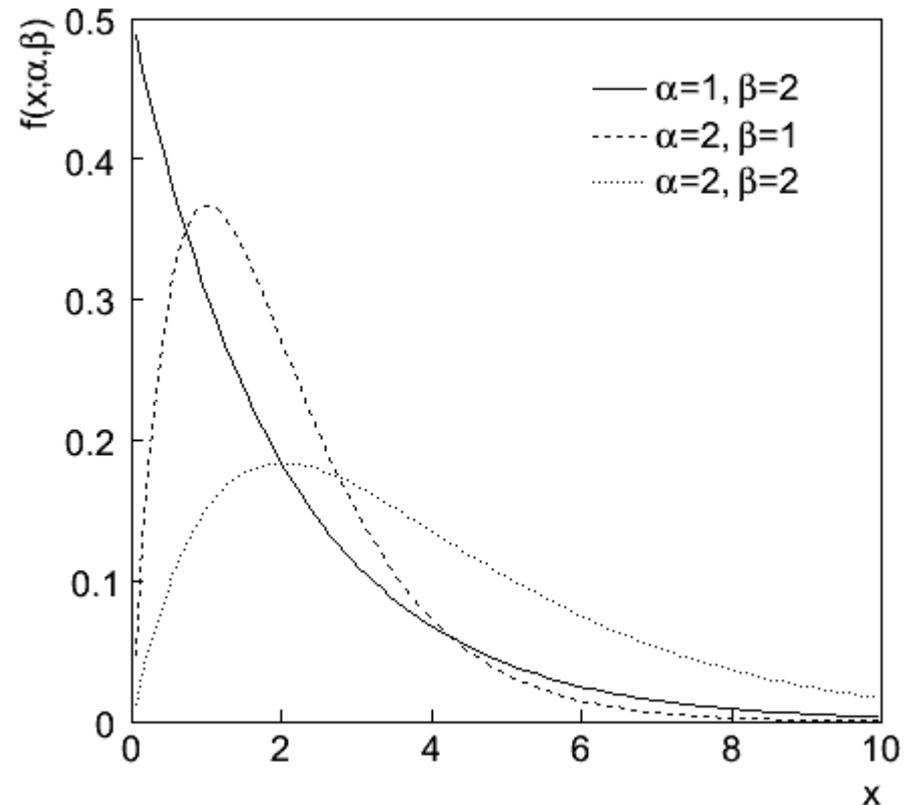
$$E[x] = \alpha\beta$$

$$V[x] = \alpha\beta^2$$

Oft benutzt um eine WDF im Bereich $[0, \infty]$ zu parametrisieren.

Beschreibt auch z.B.

- Summe von n ZV aus Exponentialverteilung
- Zeit bis zum n ten Ereignis in einem Poisson-Prozess



Studentsche t -Verteilung

$$f(x; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

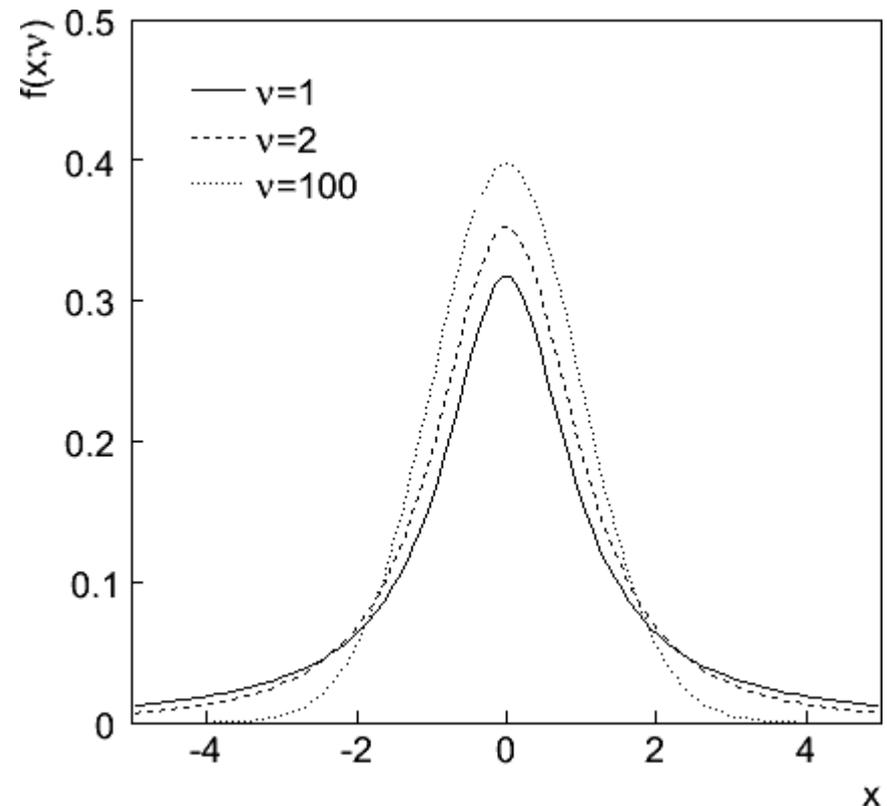
$$E[x] = 0 \quad (\nu > 1)$$

$$V[x] = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2)$$

ν = Anzahl der Freiheitsgrade
(nicht notwendigerweise
ganzzahlig)

$\nu = 1$ ergibt Cauchy-WDF

$\nu \rightarrow \infty$ ergibt Gauss-WDF



Studentsche t -Verteilung (2)

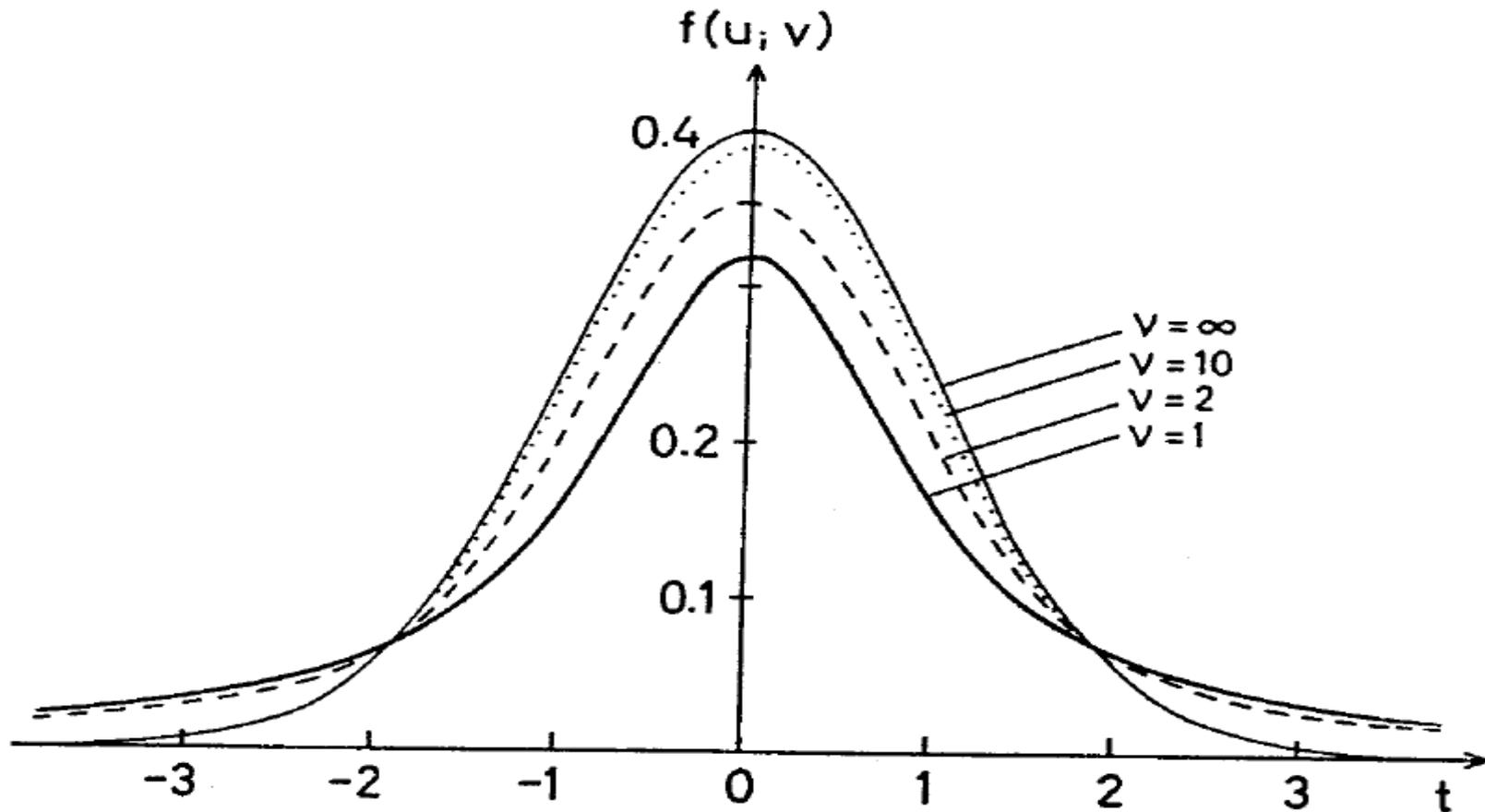


Fig. 5.3. The Student's t -distribution for different degrees of freedom v . The special cases $v=1$ and $v=\infty$ correspond to the Cauchy (Breit-Wigner) and the standard normal distributions, respectively.

Studentsche t -Verteilung (3)

Wenn

x ZV aus Gauss-WDF mit $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, und

z ZV aus χ^2 -WDF mit n Freiheitsgraden,

dann ist ZV $t = x / (z/n)^{1/2}$ verteilt gemäß

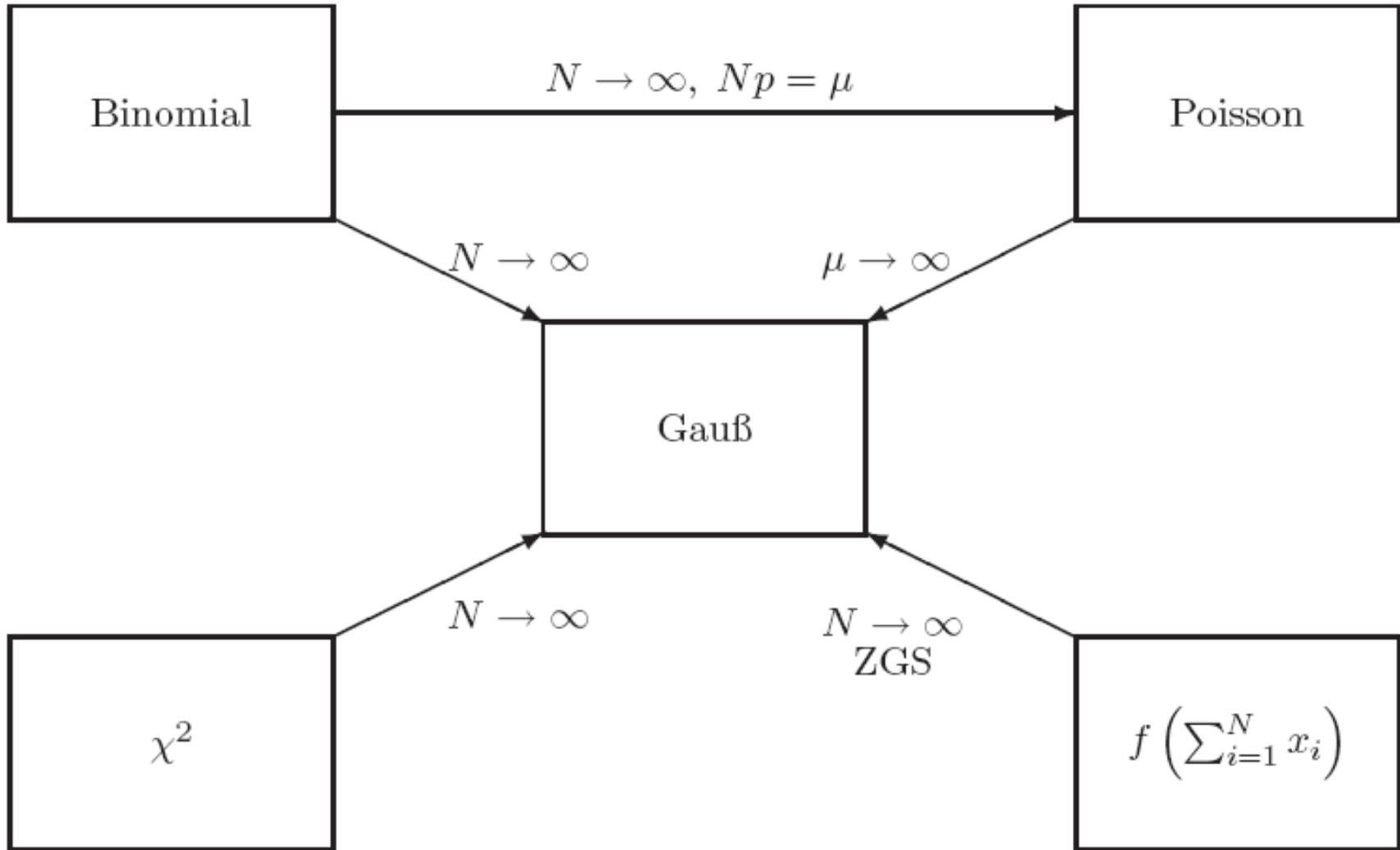
Studentscher t -WDF mit $\nu = n$ Freiheitsgraden.

Diese ZV taucht in Problemen auf, in denen man das Verhältnis
Von Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz betrachtet.

Studentsche t -WDF liefert Glockenkurve mit adjustierbaren Ausläufern
von Gauss-WDF ($\nu \rightarrow \infty$) bis Cauchy-WDF ($\nu = 1$).

Entwickelt in 1908 von William Gosset, der unter dem Pseudonym
"Student" für die Guinness-Brauerei arbeitete.

Zusammenhang zwischen WDFs



Zusammenhang zwischen WDFs

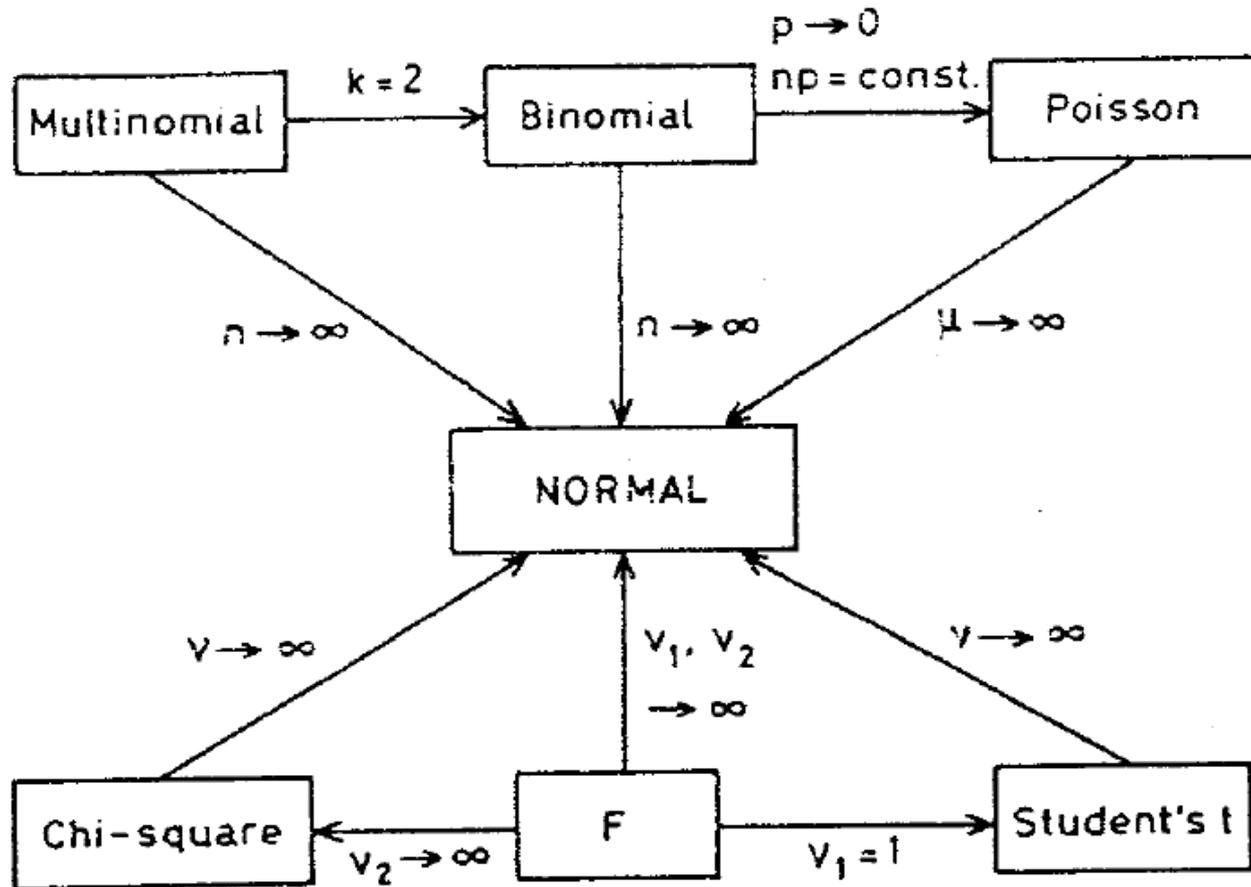


Fig. 5.5. Relations between probability distributions.

Tabellarische Übersicht

Name	Definitionsbereich	Wahrscheinlichkeits(dichte)	$\langle x \rangle = E[x]$	$\sigma_x = \sqrt{V[x]}$	charakter. Funktion
Binomial	$\{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$	$f(x; p, N) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}$	Np	$\sqrt{Np(1-p)}$	$(p(\exp(ik) - 1) + 1)^N$
Poisson	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$	λ	$\sqrt{\lambda}$	$\exp(\lambda(\exp(ik) - 1))$
Gleichvert.	$[a, b]$	$f(x; a, b) = \frac{1}{(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$	$\frac{\exp(ibk) - \exp(iak)}{(b-a)ik}$
Gauß	$[-\infty, \infty]$	$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ	$\exp(i\mu k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2)$
Chi-Quadrat	$[0, \infty]$	$f(x; n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-x/2)$	n	$2n$	$(1 - 2ik)^{-n/2}$
Exponentiell	$[0, \infty]$	$f(x; \xi) = \frac{1}{\xi} \exp(-x/\xi)$	ξ	ξ	$\frac{1}{1-ik\xi}$
Cauchy	$[-\infty, \infty]$	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	(0)	∞	$\exp(- k)$
Landau	$[0, \infty]$	$f(x; \beta) = \dots$	∞	∞	