Beweis des Neyman-Pearson-Lemma

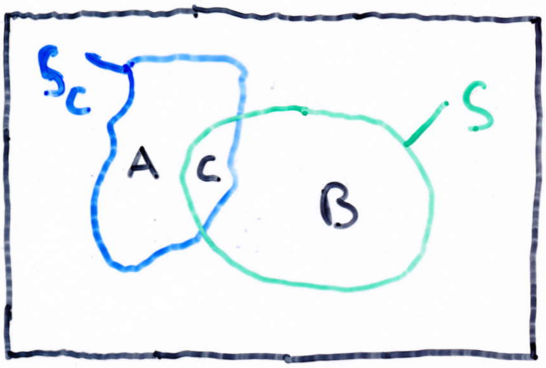
E = Ereignisraum

S_c kritische Region für α konstruiert d. NPL

S weitere kritische Region mit Signifikanz α

z.Z: $(1-\beta)_{S_c}$ maximal, d.h

$$(1-\beta)_{S_c} > (1-\beta)_S \text{ für bel. } S$$



$$S_c = A \cup C$$
$$S = B \cup C$$
$$C = S_c \cap S$$

$$\int_{S_c} f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x} = \int_S f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x} = \alpha$$

und: $\int_A f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x} = \int_B f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x}$ (1)

da $A \subseteq S_c$: $\int_A f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x} \leq c \int_A f(\vec{x} \mid H_1)\, d\vec{x}$ (2)

da $B \cap S_c = \emptyset$: $\int_B f(\vec{x} \mid H_0)\, d\vec{x} \geq c \int_B f(\vec{x} \mid H_1)\, d\vec{x}$ (3)

da S_c nach NP konstruiert

$$(1-\beta)_{S_c} = \int_{S_c} f(\vec{x}\,|\,H_1)\,d\vec{x}$$

$$= \int_A f(\vec{x}\,|\,H_1)\,d\vec{x} + \int_C f(\vec{x}\,|\,H_1)\,dx$$

(2) $$\geq \frac{1}{c}\int_A f(\vec{x}\,|\,H_0)\,d\vec{x} + \quad \text{''}$$

(1) $$= \frac{1}{c}\int_B f(\vec{x}\,|\,H_0)\,d\vec{x} + \quad \text{''}$$

(3) $$\geq \frac{c}{c}\int_B f(\vec{x}\,|\,H_1)\,d\vec{x} + \quad \text{''}$$

$$\geq \int_S f(\vec{x}\,|\,H_1)\,d\vec{x} = (1-\beta)_S$$

$\blacksquare$