Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2013/2014

# Statistische Methoden der Datenanalyse

Markus Schumacher, Stan Lai, Florian Kiss

# Übung IV

**19.11.2013, 20.11.2013**

## Anwesenheitsaufgaben

**Aufgabe 21** *Zufallsgenerator für einen Teilchenzerfall*

In dieser Übung werden wir die Transformationsmethode anwenden, um Zufallszahlen $\vec{x}$ zu erzeugen, die gemäss der Exponentialverteilung

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{x}{\tau}\right)$$

verteilt sind. Die Variablen $\vec{x}$ könnten beispielsweise die Zerfallszeiten eines Teilchens mit Lebensdauer $\tau$ repräsentieren.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Erstellen Sie einen Zufallsgenerator vom Typ `TRandom3`.

(ii) Erstellen Sie eine `for`-Schleife, die für die Zufallsexperimente steht. Erstellen Sie innerhalb der `for`-Schleife gleichverteilte Zufallszahlen mittels der `Uniform`-Methode. Diese können Sie mit der Transformationsvorschrift

$$x(r) = -\tau \ln r$$

in exponentiell verteilte Zufallszahlen umwandeln. Erstellen Sie dazu am Anfang des Skriptes eine Fliesskommazahl `float tau=2.;`, um sich diese Variable zu merken (der Wert 2 wurde hier nur beispielhaft gewählt.)

(iii) Erstellen Sie vor der `for`-Schleife ein Histogramm mit geignetem Binning, in welches Sie dann innerhalb der `for`-Schleife die exponentiell verteilten Zufallszahlen einfüllen und anschliessend graphisch darstellen.

(iv) Ausserdem wollen wir die erzeugten Werte für die Zufallsvariablen (sowohl die gleichverteilten, als auch die exponentiell verteilten) in einen sogenannten `TTree` einfüllen und diesen in einer Datei abspeichern. Benutzen Sie dazu die folgenden Kommandos:

```
TFile myfile=TFile("myfile.root","RECREATE");
TTree mytree=TTree("mytree","mytree");
```

Hiermit wird eine Datei mit Dateinamen `myfile.root` angelegt. Anschliessend wird ein `TTree`-Objekt angelegt, welches den Namen `mytree` erhält. Um nun Variablen vorzubereiten, um sie in den `TTree` einzufüllen, gehen Sie wie folgt vor (immer noch ausserhalb der `for`-Schleife!):

```
float expzufall;
mytree.Branch("expzufall",&expzufall,"expzufall/F");
```

Damit wird eine Variable names `expzufall` im `TTree` vorbereitet, so dass Sie eingefüllt werden kann. Um den aktuellen Werte einer Variablen innerhalb der `for`-Schleife einzufüllen, stellen Sie sicher, dass `expzufall` auf dem gewünschten Wert steht und füllen sie in den `TTree` mittels

```
mytree.Fill();
```

Am Ende des Skriptes sollten Sie dann noch sicherstellen, dass der erstellte `TTree` ausgeschrieben wird, und die erstellte Datei ordnungsgemäß geschlossen wird:

```
mytree.Write();
myfile.Write();
myfile.Close();
```

(v) Öffnen Sie die von Ihnen erstellte Datei mittels des sogenannten `TBrowser` und stellen Sie sicher, dass in der Tat Variablen eingefüllt wurden.

(vi) Wenn alles funktioniert, benutzen Sie nun das von Ihnen erstellte Skript, um exponentiell verteilte Zufallszahlen ($0 \leq \tau \leq 5$) mit einem Stichprobenumfang von 100 zu erstellen und diese Zahlen in einer Datei mittels des `TTree` abzuspeichern. Lassen Sie niemanden den von Ihnen benutzten Wert von $\tau$ wissen (aber merken Sie ihn sich selber)! In einer der nächsten Übungen sollten Sie Ihre erzeugte Datei mit einem anderen Übungsteilnehmer tauschen, und versuchen herauszufinden, welchen Wert von $\tau$ der jeweils andere benutzt hat. Wie dies bewerkstelligt werden kann, wird in einer der nächsten Vorlesungen besprochen werden.

**Zusatzaufgabe 22** *Zeitdifferenz zwischen radioaktiven Zerfällen*

Betrachten Sie den radioaktiven Zerfall eines Isotopes mit Zerfallskonstante $\lambda$. Angenommen, es gäbe ein Gerät zur Bestimmung der Zeitdifferenz $\Delta t$ zwischen zwei Zerfällen des Isotopes. Falls Sie eine Anzahl von Zeitdifferenzen $\Delta t_i$ über eine Gesamtzeit von $t$ messen, wie viele Einzelmessungen werden Sie durchführen? Sofern die Annahme gilt, dass Zerfälle von einzelnen Atomen unabhängig voneinander sind, ist die WDF für eine Anzahl von Zeitdifferenzen $n$ gegeben durch die Poisson-Verteilung

$$f(n;t,\lambda) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Um $f(n;t,\lambda)$ mit $t = 1$ und $\lambda = 6$ numerisch zu bestimmen, gehen Sie folgendermassen vor:

(i) Benutzen Sie einen Zufallszahlengenerator vom Typ `TRandom3` um eine zufällige Zerfallszeit einer exponentiellen WDF auszugeben

```
myrand.Exp(tau);
```

wobei `tau` für die Zerfallskonstante der Exponentialverteilung ($\tau = 1/\lambda$) steht.

(ii) Verwenden Sie dann eine `while`-Schleife um alle Zerfallszeiten bis zu einem Maximalwert aufzuaddieren. Eine `while`-Schleife kann in der Form

```
while (Bedingung == wahr){
mache etwas
}
```

geschrieben werden, so dass die Schleife fortwährend ausgeführt wird, solange die Bedingung (in dieser Übung `sum < maxsum`) wahr ist. Nehmen Sie als Maximalwert $t = 1$ an.

(iii) Zählen Sie, wie oft die Schleife ausgeführt wird (was demzufolge der Anzahl an Zerfällen entspricht) und füllen Sie diese Zahl in ein Histogramm. Beachten Sie bitte, dass die `while`-Schleife eventuell nur einmal ausgeführt wird, was bedeutet, dass innerhalb des Zählfensters kein Zerfall registriert wurde!

(iv) Führen Sie diese Befehlsabfolge innerhalb einer weiteren `for`-Schleife aus um das Experiment 10000 Mal durchzuführen.

(v) Normieren Sie Ihr Histogramm auf 1 um die WDF für diese Anzahl an Messungen zu erhalten.

(vi) Zeichnen Sie dann das Histogramm für die Anzahl an Messungen $n$ unter Verwendung der Methode `hist.Draw();`. Vergleichen Sie jetzt die Verteilung Ihrer Anzahl an Messungen mit der Poisson-Verteilung.

Gehen Sie folgende Schritte durch:

(i) Erzeugen Sie eine eindimensionale Funktion (TF1) um die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von $n$ berechnen zu können.

```
TF1 funk = TF1("funk","TMath::Poisson(x,[0]*[1])", 0.0, 50);
```

wobei `funk` für den Namen der Funktion steht, und [0] und [1] zwei Parameter sind ($\lambda$, beziehungsweise $t$).

(ii) Legen Sie beide Parameter fest, beispielsweise Parameter 0 auf den Wert 1.0, indem Sie die folgende TF1-Methode benutzen:

```
funk.SetParameter(0,1.0);
```

(iii) Zeichnen Sie die Funktion mit dem Befehl `funk.Draw()`.

# Hausaufgaben

**Aufgabe 23** *Exponentialverteilung* **4 Punkte**

Betrachtet sei eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x;\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert und die Varianz ergeben zu:

$$E[x] = \xi$$

$$V[x] = \xi^2.$$

**Aufgabe 24** *Gaussverteilung mit zwei Variablen* **4 Punkte**

Die Formel für eine mehrdimensionale Gaussverteilung für Zufallsvariablen $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ lautet:

$$f(\vec{x};\vec{\mu},V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|V|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right]$$

wobei $V$ die Kovarianzmatrix ist ($|V|$ ist die Determinante von $V$, und $V^{-1}$ ist die inverse) und $(\vec{x}-\vec{\mu})^T$ und $(\vec{x}-\vec{\mu})$ die Zeilen- bzw. Spaltenmatrizen für $x_i - \mu_i$ sind. (Die $\mu_i$ sind die Erwartungswerte für $x_i$.)

Zeigen Sie dass für zwei Variablen, die Gaussverteilung gegeben ist durch:

$$f(x_1,x_2;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right]$$

**Aufgabe 25** *Transformationsmethode* **5 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach einer Potenzverteilung

$$f(x) = (n+1)x^n, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n > -1$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = r^{\frac{1}{n+1}}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall [0,1] Zufallszahlen nach der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = \tan\left[\pi(r-\frac{1}{2})\right].$$

(iii) Betrachten Sie jetzt die Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma}\frac{\Gamma^2}{4\cdot(x-x_0)^2+\Gamma^2}.$$

Benutzen Sie das Ergebnis aus (ii), um eine Transformation zu ermitteln, mit der sich Breit-Wigner-verteilte Zufallszahlen erzeugen lassen.

**Aufgabe 26** *Summe von gleichverteilten Zufallsvariablen* **4 Punkte**

Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariable $x$ gleichverteilt im Intervall [0,1] ist. Betrachten Sie nun die Summe von $n$ unabhängigen Werte von $x$

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(i) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von $y$ gegeben ist durch $n/2$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Varianz gegeben ist durch $n/12$.

(iii) Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass die Zufallsvariable

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

einen Erwartungswert von 0 und Standardabweichung 1 hat.

**Aufgabe 27** *Inverse gleichverteilte Zufallsvariable* **3 Punkte**

Nehmen Sie an, die Zufallsvariable $x$ sei gleichverteilt im Intervall $[\alpha,\beta]$.

(i) Finden Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $y = 1/x$.

(ii) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $1/E[x]$ für $\alpha = 1,\beta = 2$.